FEUILLE 3-TER, FORMES LINÉAIRES ET DUALITÉ

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les formes linéaires : $f_1(X) = x + y - z$, $f_2(X) = x - y + z$, $f_3(X) = x + y + z$.

1– Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de $(\mathbb{R}^3)^*$.

2– Trouver la base duale.

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les formes linéaires : $f_1(X) = x+2y+3z$, $f_2(X) = 2x + 3y + 4z$, $f_3 = 3x + 4y + 6z$.

1– Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de $(\mathbb{R}^3)^*$.

2– Trouver la base duale.

Exercice 3. Pour $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on pose $f_i(x) = x_i + x_{i+1}$ et $f_n(x) = x_n + x_1$. Déterminer si $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ est une base de $(\mathbb{R}^n)^*$ et le cas échéant, déterminer la base duale.

Exercice 4. Soit $E = \mathbb{R}^n[X]$. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (f_0, \ldots, f_n)$ est une base de E^* et donner la base duale lorsque

1– $f_i(P) = P(x_i)$ où $x_0, \ldots, , x_n$ sont des scalaires distincts.

2– $f_i(P) = P^{(i)}(0)$.

3– $f_i(P) = P^{(i)}(x_i)$ où $x_0, \ldots, , x_n$ sont des scalaires quelconques. Ne pas chercher la base duale pour cet exemple.

Exercice 5. Soit $E = \mathbb{R}^{2n-1}[X]$, et $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ distincts. On note :

$$\begin{array}{lcl} \phi_i : P & \mapsto & P(x_i) \\ \psi_i : P & \mapsto & P'(x_i) \end{array}$$

1– Montrer que $(\phi_1, \ldots, \phi_n, \psi_1, \ldots, \psi_n)$ est une base de E^*.

2– Chercher la base duale. On notera $P_i = \prod_{j\neq i} \dfrac{X - x_j}{x_i - x_j}$ et $d_i = P_i'(x_i)$.

Exercice 6. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. On considère les formes linéaires :

$$f_i : P \mapsto \int_{t=-1}^{1} t^i P(t)\,\mathrm{d}t.$$

1– Montrer que (f_0, f_1, f_2, f_3) est une base de E^*.

2– Trouver la base duale.

Exercice 7. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et a, b, c distincts. On considère les formes linéaires sur E :

$$f_a : P \mapsto P(a), \quad f_b : P \mapsto P(b), \quad f_c : P \mapsto P(c), \quad \phi : P \mapsto \int_{t=a}^{b} P(t)\,t.$$

étudier la liberté de (f_a, f_b, f_c, ϕ).

Exercice 8. Soit $E = \mathbb{R}^n[X]$. On note $P_0 = 1$ et pour $i \geqslant 1$: $P_i = X(X-1)\dots(X-i+1)$ et $f_i : P \mapsto P(i)$.

1– Montrer que $\mathcal{P} = (P_0, \dots, , P_n)$ est une base de E de base duale $P_0^*, \dots, P_n^*$ et $\mathcal{F} = (f_0, \dots, , f_n)$ est une base de E^*.

2– Décomposer la forme linéaire P_n^* dans la base $\mathcal{P}$. On pourra utiliser les polynômes : $Q_i = \prod_{j\not{i},1\leqslant j\leqslant n}(X-j)$.

3– Décomposer de même les autres formes linéaires P_k^*.

Exercice 9. Soit $E = \mathbb{R}^n[X]$ et a, b distincts. On pose $P_k = (X-a)^k(X-b)^{n-k}$.

1– Montrer que $(P_0, \dots, , P_n)$ est une base de E.

2– On suppose $n = 2$, et on prend comme base de E^* : $\mathcal{F} = (f_a, f_c, f_b)$ où $f_x(P) = P(x)$ et $c = \dfrac{a+b}{2}$. Exprimer les formes linéaires (P_1^*, P_2^*, P_3^*) dans E^*.

Exercice 10. Soient $f_1, \dots, f_n$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$.

On suppose qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $f_1(x) = \dots = f_n(x) = 0$. Montrer que $(f_1, \dots, f_n)$ est liée.

Exercice 11. Soit $E = \mathbb{R}^n[X]$. On considère les formes linéaires : $f_i : P \mapsto P'(i)$. Montrer que $(f_0, \dots, , f_n)$ est liée.

Exercice 12. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$.

1– Soit $\phi \in E^*$ telle que : $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\phi((X-a)P) = 0$.

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall P \in E$, $\phi(P) = \lambda P(a)$.

2– Soit $\phi \in E^*$ telle que : $\forall P \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$, $\phi((X-a)^2P) = 0$.

Montrer qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$tels que : $\forall P \in E$, $\phi(P) = \lambda P(a) + \mu P'(a)$.

Exercice 12. Montrer l'existence et l'unicité d'une forme linéaire ϕ sur $\mathbb{R}_n[X]$ telle que : $\phi(1) = 0$, $\phi(X) = 1$ et $\phi(P) = 0$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(0) = P(1) = 0$.