L3 Maths : Algèbre et Géométrie — Feuille n° 3

I. Soit $f : E \to E$ un endomorphisme d'un k-espace vectoriel.

(a) Montrer qu'un sous-espace de dimension 1 de E de la forme $\langle v \rangle = kv$ est stable sous E si et seulement si v est un vecteur propre de E.

(b) Montrer qu'un sous-espace $V \subset E$ est stable sous f si et seulement si on a $V \subset f^{-1}(V)$.

(c) Or soit $E = k^n$ et $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ pour une matrice carrée $A = (a_{ij})$. Soit

$$V_{\boldsymbol{\beta}} = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in k^n \mid \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i = 0 \} \subset E$$

un sous-espace de dimension $n-1$. Montrer qu'on a

$$f^{-1}(V_{\boldsymbol{\beta}}) = V_{\boldsymbol{\gamma}} = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in k^n \mid \sum_{i=1}^{n} \gamma_i x_i = 0 \} \subset E$$

avec $\gamma_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\beta_j$.

(d) En déduire que $V_{\boldsymbol{\beta}}$ est stable sous f si et seulement si $\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A^T.

II. Utiliser l'exercice précédent pour trouver tous les sous-espaces stables (de dimensions 0, 1, 2, 3) sous les endomorphismes $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de formule $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ pour les matrices A suivantes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

III. Pour chacune des matrices N_i ci-dessous, trouver les informations suivantes

- $\ker N_i$: base et dimension
- $\ker N_i^2$: base et dimension
- $\ker N_i^3$: base et dimension
- $\ker N_i^4$: base et dimension
- polynômes minimal et caractéristique de N_i
- les tailles des blocs de Jordan dans lesquels N_i se décompose

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad N_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad N_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

IV. Combien y a-t-il de formes canoniques de Jordan J dans $M_7(k)$ telles que

- J est nilpotente d'indice 3, et
- $\mathrm{rg}(J) = 4$?

Pour chacune des formes de Jordan considérées, donner une condition nécessaire et suffisante pour que la forme de Jordan d'une matrice $M \in M_7(k)$ soit J.

V. On considère les deux matrices suivantes dans $M_3(\mathbb{Q})$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer que A et B sont trigonalisables et que chacune d'entre elles a une seule valeur propre de multiplicité 3, qu'on notera respectivement λ et μ.

(b) Calculer pour $n = 1, 2$, les dimensions de $\ker[(A - \lambda I)^n]$ et de $\ker[(B - \mu I)^n]$. En déduire les formes de Jordan J_A et J_B des deux matrices.

(c) Trouver des matrices inversibles P et Q avec $A = PJ_AP^{-1}$ et $B = QJ_BQ^{-1}$.

VI. On considère la matrice $M = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ dans $M_2(\mathbb{Q})$.

(a) Déterminer son polynôme caractéristique et son polynôme minimal. En déduire la forme de Jordan de M et décomposer M sous la forme $M = I + W$ avec I la matrice identité et W nilpotente. Quel est l'indice de nilpotence de W ?

(b) Déterminer les sous-espaces de $\mathbb{Q}^2$ stables sous la multiplication par M.

(c) Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

VII. On considère les matrices C, E de $M_3(\mathbb{Q})$ définies par

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q})$ telle que $C = PEP^{-1}$.

(b) Ecrire $E = D + U$ avec D diagonale et U nilpotente vérifiant $DU = UD$. Quel est l'indice de nilpotence de U ?
En déduire E^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(c) En déduire C^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(d) Trouver la décomposition de Dunford $C = S + N$ avec S diagonalisable et N nilpotente et $SN = NS$. (Rappel : $S = PDP^{-1}$ et $N = C - S = PUP^{-1}$.)