FEUILLE 4: SOUS ESPACES STABLES, MATRICES NILPOTENTES ET RÉDUCTION DE JORDAN

**=plus difficile*

Exercice 1. Soit f l'endomorphisme de R^3 dont la matrice dans la base canonique est la suivante. Trouvez tous les sous espaces stables par f dans chacun des cas suivants :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, C := \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Soit N une matrice nilpotente. Montrez que la matrice $I - N$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de N. Calculez l'inverse du bloc de Jordan

$$J_k(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. 1– Montrez que que les matrices carrées 2×2 nilpotentes sont les matrices

$$A := \begin{pmatrix} -a & b \\ c & a \end{pmatrix}, \text{avec } a^2 + bc = 0.$$

2– Montrer que deux matrices nilpotentes de $M_3(\mathbb{R})$ sont semblables si et seulement si elles ont le même polynôme minimal.

3– Construire deux matrices non semblables de $M_4(\mathbb{R})$ nilpotentes, ayant le même polynôme minimal.

Exercice 4*. Soit A une matrice carrée $n \times n$ à coefficients complexes.

1– Montrez que si A est nilpotente alors $\forall k \in [1, n]$, $Tr(A^k) = 0$.

2– Montrez que si $\forall k \in [1, n]$, $Tr(A^k) = 0$, alors le determinant de A est nul (utilisez Cayley–Hamilton).

3– Soit V_λ le sous espace caractéristique associé à la valeur propre λ. Soit $\{\lambda_i\}$ les valeurs propres, Soit $E_A = \bigoplus_{\lambda_i \neq 0} V_{\lambda_i}$. Montrez que E est stable par A et que $\det A| \, |_{E_A} = 0$.

4– Montrez que si $\forall k \in [1, n]$, $Tr(A^k) = 0$, alors $E_A = \{0\}$, puis que A est nilpotente.

Exercice 5*. Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie vérifiant $f \circ g - g \circ f = f$.

1– Calculez $f^n \circ g - g \circ f^n$

2– Soit P un polynome annulateur de f, montrez que $f \circ P'(f) = 0$

3-Montrez que si $P(X)$ est un polynome et $X.P'(X)$ divise P alors $P(X) = X^n$.

3– Montrer que f est nilpotent.

Exercice 6*. Soit $A \in GL(n, \mathbb{C})$ et N nilpotente telles que $AN = NA$.

Montrez que $\det(A + N) = \det(A)$.

Exercice 7.

1–Trouvez les réduites de Jordan des matrices suivantes. Trouvez les matrices de passage puis A^{-1} et A^n pour

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ -3 & -1 & -5 \end{pmatrix}, \ A := \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 3 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \ A := \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2–Trouvez les réduites de Jordan des matrices suivantes, en précisant les matrices de passages. En déduire A^{-1} et A^n.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 5 \\ 6 & 6 & 2 & 6 \\ -7 & -6 & -6 & -6 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & -3 \\ 2 & 2 & -1 & -5 \end{pmatrix},$$

Ainsi que

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 6 & -8 & -2 & -3 \\ 0 & -8 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8*. 1– Soit $J_k(\lambda)$ le bloc de Jordan défini dans l'exercice 2. Montrez que $J_k(\lambda)$ est semblable à sa transposée.

2– En utilisant la réduite de Jordan, Montez que toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est semblable à sa transposée.

Exercice 9*. Soient

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} a & a & a \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & a & a \\ b & b & a \end{pmatrix},$$

1–Trouvez la réduite de Jordan de A et C.

2– Montrez que $B = C^3 + C^2 + C$ en déduire la réduite de Jordan de B.

3– Trouvez la réduite de Jordan de D.