L3 Maths 2013 : Algèbre et Géométrie — Feuille n° 5

I. Soit $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. Pour chacune des formes bilinéaires suivantes $B_i : V \times V \to \mathbb{R}$, répondre aux questions suivantes.

$$
\begin{aligned}
B_1(f,g) &= \int_0^1 f'(x)g'(x)\,dx,\\
B_2(f,g) &= -f(0)g(0) + \int_0^1 f'(x)g'(x)\,dx,\\
B_3(f,g) &= \int_0^1 \Big(f(x)g(x) + f'(x)g'(x)\Big)\,dx,\\
B_4(f,g) &= \int_0^1 \Big(f(x)g'(x) + f'(x)g(x)\Big)\,dx,\\
B_5(f,g) &= \int_0^1 \Big(f(x)g'(x) - f'(x)g(x)\Big)\,dx.
\end{aligned}
$$

- Déterminer si la forme B_i est symétrique, anti-symétrique, ou autre.
- Déterminer le radical (ou noyau) de B_i :

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rad} B_i &= \{f \in V \mid B_i(f,g) = 0 \text{ pour tout } g \in V\}\\
&= \{f \in V \mid B_i(f,-) \equiv 0\} \subseteq V.
\end{aligned}
$$

- Déterminer la matrice de B_i par rapport à la base $\{1, x, x^2\}$ de V.
- Déterminer le rang de B_i.
- Déterminer si B_i est non dégénérée ou dégénérée.
- Déterminer les $f(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ qui sont **isotropes** par rapport à B_i (c'est-à-dire vérifiant $B_i(f,f) = 0$).

II. On considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Pour chacune des formes bilinéaires **réelles** suivantes $B_i : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, répondre aux mêmes questions que dans l'exercice précédent, mais en utilisant $\{1, i\}$ comme base de l'espace vectoriel réel $\mathbb{C}$.

$$
\begin{aligned}
B_6(z,w) &= \mathfrak{Re}(zw), & B_7(z,w) &= \mathfrak{Im}(zw),\\
B_8(z,w) &= \mathfrak{Re}(\overline{z}w), & B_9(z,w) &= \mathfrak{Im}(\overline{z}w),
\end{aligned}
$$

III. Répondre aux questions ci-dessous pour chacune des formes quadratiques suivantes sur $\mathbb{Q}^2$:

$$
\begin{aligned}
Q_1(X,Y) &= X^2 + 2XY + Y^2,\\
Q_2(X,Y) &= X^2 - XY + Y^2,\\
Q_3(X,Y) &= X^2 + 2XY - Y^2,
\end{aligned}
$$

- Quelle est la matrice de Q_i par rapport à la base canonique de $\mathbb{Q}^2$?
- Quel est le rang de Q_i ? Est-elle non dégénérée ?
- Ecrire Q_i sous la forme $Q_i = a_1 L_1^2 + a_2 L_2^2$ avec les $a_i \in \mathbb{Q}$ et L_1, L_2 des formes linéaires indépendantes sur $\mathbb{Q}^2$.
- Quelle est la signature de Q_i ? Est-elle définie positive, définie négative, ou indéfinie ?
- Existe-t-il $(a,b) \neq (0,0)$ dans $\mathbb{Q}^2$ avec $Q_i(a,b) = 0$? En existe-t-il dans $\mathbb{R}^2$?

IV. Répondre aux questions analogues pour les formes quadratiques suivantes sur $\mathbb{Q}^3$:

$$\begin{aligned}
q_1(X,Y,Z) &= X^2+Y^2-Z^2,\\
q_2(X,Y,Z) &= X^2-XY+Y^2-YZ+Z^2,\\
q_3(X,Y,Z) &= X^2+2XY+2XZ+Y^2+2YZ+Z^2,\\
q_4(X,Y,Z) &= XY+XZ+YZ.
\end{aligned}$$

V. (a) Quelle est la signature de la forme quadratique XY sur $\mathbb{R}^2$?
Donner des sous-espaces vectoriels V_+, V_-, W de $\mathbb{R}^2$ de dimension maximale avec
- $V_+ \subset \mathbb{R}^2$ de dimension maximale avec $Q|_{V_+} > 0$ (définie positive),
- $V_- \subset \mathbb{R}^2$ de dimension maximale avec $Q|_{V_-} < 0$ (définie négative),
- $W \subset \mathbb{R}^2$ de dimension maximale avec $Q|_W \equiv 0$. (On dit que W est *totalement isotrope* pour Q).

(b) *Idem* pour la forme quadratique suivante sur $\mathbb{R}^{r+2s}$.

$$X_1^2+\cdots+X_r^2+X_{r+1}X_{r+2}+X_{r+3}X_{r+4}+\cdots+X_{r+2s-1}X_{r+2s}$$

VI. (a) *Idem* pour la forme quadratique suivante sur $M_2(\mathbb{R})$.

$$Q_2 : \begin{array}{ccc} M_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & \mathrm{Tr}(A^2) \end{array}$$

(b) *Idem* pour la forme quadratique suivante sur $M_n(\mathbb{R})$.

$$Q_n : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & \mathrm{Tr}(A^2) \end{array}$$

(c) *Idem* pour la forme quadratique suivante sur $M_n(\mathbb{R})$.

$$q_n : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & \mathrm{Tr}({}^tAA) \end{array}$$

VII. Répondre aux questions pour les formes quadratiques suivantes sur $\mathbb{R}^n$ avec $n=2$ ou 3.

$$\begin{aligned}
Q(X,Y) &= 2X^2-2XY+2Y^2,\\
Q(X,Y,Z) &= X^2-2XY+2XZ+Y^2+2YZ-Z^2.
\end{aligned}$$

- Trouver une base orthonormée $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ ou $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ diagonalisant Q.
- Soit L_1,L_2 ou L_1,L_2,L_3 les fonctions coordonnées par rapport à la base orthonormée $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$. Ecrire $Q=\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i^2$.
- Quel genre de conique ou quadrique est donné par $Q(\mathbf{x})=1$?
  Où cette conique ou quadrique intersecte-t-elle les axes $\mathbb{R}\mathbf{v}_1$, $\mathbb{R}\mathbf{v}_2$ ou $\mathbb{R}\mathbf{v}_1$, $\mathbb{R}\mathbf{v}_2$, $\mathbb{R}\mathbf{v}_3$, du nouveau système de coordonnées ?
  Dessiner la conique.

VIII. Pour chaque forme quadratique de l'exercice III, la conique d'équation $Q_i(X,Y)=1$ est-elle une ellipse, une hyperbole, ou autre chose ?

IX. Pour chaque forme quadratique de l'exercice IV, la quadrique d'équation $q_i(X,Y,Z)=1$ est-elle un ellipsoïde, un hyperboloïde à une nappe, un hyperboloïde à deux nappes, ou autre chose ?