Exercice 1. Soit $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire euclidien cannonique. Soit $V_1 = (1, 2, -1, 1)$, $V_2 = (0, 3, 1, -1)$ et $F = \mathrm{Vec}(V_1, V_2)$.

1- Donnez une base orthonormale de F, et une base orthonormale de $F^{\perp}$.

Exercice 2. Appliquez l'algorithme de Gram–Schmidt au vecteurs $v_1 = (1, 2, -1, -2)$, $v_2 = (2, 3, 0, -1)$, $v_3 = (5, -2, -5, -2), v_4 = (8, 10, -10, 4)$ de $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire euclidien cannonique.

Exercice 3. Soit $x_1, \ldots, x_n$ des nombres réels, montrez que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} x_k^2,$$

et précisez les cas d'égalité.

Exercice 4. Soit $x_1, \ldots, x_n$ des nombres réels, tels que $x_i > 0$ et $x_1 + \ldots + x_n = 1$. Montrez que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geqslant n^2,$$

et précisez les cas d'égalité.

Exercice 5. Soit $E = C\left([0, 1], \mathbb{R}\right)$ l'espace vectoriel des fonctions continues

1- Montrez que $\langle f \mid g \rangle = \int_0^1 f(t) \cdot g(t) \mathrm{d}t$ défini un produit scalaire sur E;

2- Pour toute fonction f on note

$$I_n(f) = \int_0^1 t^n f(t) \mathrm{d}t.$$

Montrez que

$$I_{n+p}(f)^2 \leqslant I_n(f) I_p(f).$$

Exercice 6. Soit E un espace euclidien, soit F un sous espace-vectoriel et $e_1, \ldots, e_k$ une base de l'orthogonal de F. Soit p et q les applications linéaires donnée par

$$q(x) \quad = \quad \sum_{j=1}^{k} \langle x \mid e_j \rangle \, e_j,$$

$$p(x) \quad = \quad x - \sum_{j=1}^{k} \langle x \mid e_j \rangle \, e_j. \qquad (1)$$

1- Quels sont les noyaux et les images de p et q ?

2- Montrez que $p^2 = p$, $q^2 = q$.

3- Qui sont p et q ?

4- *Application:* Donnez la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur l'hyperplan $x - y + z = 0$

Exercice 7. Soit $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire euclidien cannonique. Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = x - y + z - t = 0\}$.

1- donnez une base du supplémentaire othogonal de F,

2- écrire la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.

Exercice 8. On considère $E = \mathbb{R}_{[2]}[X]$ l'espace vectoriel des polynomes de degré plus petit ou égal à deux à coefficients réels.

1- Montrez que $\langle P \mid Q \rangle = P(0)Q(0) + P(1)P(1) + P(2)Q(2)$ est un produit scalaire sur E.

2- Montrez que (X, X^2) est une base de $F = \{P \mid P(0) = 0\}$.

3- Donnez une base orthonormale de F.

Exercice 8. Soit

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ d & a & d \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1- Déterminez (=écrire les équations) les a, b, c, d pour lesquels M est orthogonale.

Exercice 9. Soit E l'espace vectoriel des polynomes de degré au plus 1.

1- déterminez les (a, b, c) tels que

$$\langle P \mid Q \rangle = \int_0^1 (ax^2 + b^x + c) P(x) Q(x) \mathrm{d}x$$

est un produit scalaire sur E.

2- on suppose $a = c = 1$, $b = 0$. Donnez une base othonormale de E.