RAPPELS SUR LES ENSEMBLES

Définitions.

$\mathbf{x} \in \mathbf{A}$: le point x est un élément de l'ensemble A.
$\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ (ou $\mathbf{B} \supset \mathbf{A}$) : l'ensemble A est contenu dans l'ensemble B, i.e. A est une partie de B, i.e. $x \in A$ implique $x \in B$.
$\mathcal{P}(\mathbf{A})$: ensemble des parties de A, i.e. $B \in \mathcal{P}(A)$ équivaut à $B \subset A$.
$\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$: réunion de A et B, i.e. $x \in A \cup B$ équivaut à $x \in A$ ou $x \in B$.
$\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$: intersection de A et B, i.e. $x \in A \cap B$ équivaut à $x \in A$ et $x \in B$.
$\mathbf{B} \setminus \mathbf{A}$: complémentaire de A dans B, i.e. ensemble des points de B qui ne sont pas dans A.
$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$: produit de A et B, i.e. ensemble formé de tous les couples (a, b) pour $a \in A$ et $b \in B$.
$\mathbf{Card}(\mathbf{A})$: cardinal de l'ensemble A, i.e. (si A est fini) le nombre d'éléments de l'ensemble A.

Soit $\mathbf{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ une application de l'ensemble X dans l'ensemble Y.
$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$: le point y est l'image du point x par l'application f.
$\mathbf{f}(\mathbf{A})$: image d'une partie A de X, i.e. partie de Y formée de tous les $y = f(x)$ pour $x \in A$.
$\mathbf{f}^{\mathbf{-1}}(\mathbf{B})$: image réciproque par f d'une partie B de Y, i.e. partie de X formée de tous les x tels que $f(x) \in B$. *Attention, remarquez que cette notation a un sens même si f n'est pas injective (ne pas confondre avec l'application inverse de f).*
Par exemple, dans le cas $X = Y = \mathbb{R}$ et $f(x) = x^2$, on a $f(]-1, 2[) = [0, 4[$ et $f^{-1}([0, 4[) =]-2, 2[$.
$\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$: application composée de f (d'abord) et de g (ensuite), i.e. $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Propriétés.

Soit $f : X \to Y$, A et A' parties de X, B et B' parties de Y. On a alors les relations suivantes :

$$
\begin{array}{ccc}
B \cap (A \cup A') = (B \cap A) \cup (B \cap A') & \text{et} & B \cup (A \cap A') = (B \cup A) \cap (B \cup A') \\
X \setminus (A \cup A') = (X \setminus A) \cap (X \setminus A') & \text{et} & X \setminus (A \cap A') = (X \setminus A) \cup (X \setminus A') \\
(A \cup A') \times B = (A \times B) \cup (A' \times B) & \text{et} & (A \cap A') \times B = (A \times B) \cap (A' \times B) \\
A \times (B \cup B') = (A \times B) \cup (A \times B') & \text{et} & A \times (B \cap B') = (A \times B) \cap (A \times B')
\end{array}
$$

$$\mathrm{Card}(A \cup B) + \mathrm{Card}(A \cap B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B)$$

$$
\begin{array}{ccc}
f(A \cup A') = f(A) \cup f(A') & \text{mais} & f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A') \\
f^{-1}(A \cup A') = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(A') & \text{et} & f^{-1}(A \cap A') = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(A')
\end{array}
$$

$$f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$$

Pièges. En général on a $f(A \cap A') \neq f(A) \cap f(A')$ et il n'y a aucune relation d'inclusion entre $f(X \setminus A)$ et $Y \setminus f(A)$. Notez de plus que

$$f^{-1}(f(A)) \supset A, \text{ avec égalité si } f \text{ est injective.}$$
$$f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X) \text{ et donc vaut } B \text{ lorsque } f \text{ est surjective.}$$

Remarques. Les propriétés précédentes s'étendent à une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties d'un ensemble d'indices I (par exemple l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers). On note alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ la réunion et $\bigcap_{i\in I} A_i$ l'intersection de la famille des ensembles A_i. Par exemple, si $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_j)_{j\in J}$ sont des familles d'ensembles, alors on a

$$(\bigcap_{i\in I} A_i) \cup (\bigcap_{j\in J} B_j) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} A_i \cup B_j \qquad \text{et} \qquad (\bigcup_{i\in I} A_i) \cap (\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \cap B_j$$

Questions.

1. Démontrer les propriétés précédentes et donner un contre-exemple pour chacun des pièges dénoncés plus haut.
2. 28% des français possèdent au moins un chien, 25% des français possèdent au moins un chat et 45% des français possèdent au moins un chien ou un chat. Peut-on en déduire le nombre de français qui ont au moins un chien et un chat ? qui n'ont ni l'un ni l'autre ?
3. Pour tout entier n, on note $A_n = \left]0, \frac{1}{n}\right[$, $\overline{A_n} = \left[0, \frac{1}{n}\right]$, $B_n = \left]-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right[$ et $\overline{B_n} = \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$. Déterminer les réunions et les intersections de ces 4 familles de parties de $\mathbb{R}$.
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Déterminer $f^{-1}([-1/2, 1/2])$.
5. Soit E un ensemble et A, B, C trois parties de E. Montrer que si $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$, alors $B = C$.
6. Soit E un ensemble et A, B deux parties de non vides de E. On considère l'application

$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & (A \cap X, B \cap X) \end{array}$$

   Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que f soit injective (resp. surjective, resp. bijective). Expliciter f^{-1} lorsque f est bijective.