Convexité

Il s'agit d'une notion spéciale aux espaces vectoriels

Soit E un e.v, $A \subset E$ est convexe si

$$\forall u, \forall v \in A, \forall t \in [0,1] \quad tu+(1-t)v \in A$$

Autrement, le segment $[x,y] \in A$ si les extremités appartiennent à A

On a lors les propriétés suivants admises

$$A \text{ convexe} \Rightarrow \overline{A} \text{ convexe}$$

$$A \text{ convexe} \Rightarrow \mathring{A} \text{ convexe}$$

Exemple 1) un s.e.v est convexe

2) une boule ouverte (ou fermée) est convexe

Continuité

Soit $U \subset E$, E un e.v.n ; soit $x \in U$; on dira que $O \subset U$ est un voisinage de x dans U, et on notera $G \in \mathcal{V}^U(x)$ si il existe $W \in \mathcal{V}(x)$ tel que $G = W \cap U$

exemple : $B(x,R) \cap U \in \mathcal{V}^U(x)$

1. fonctions et applications continues

Soit E, F deux espaces vectoriels normés.

Soit $f : U \subset E \longrightarrow F$, soit $x \in U$. On dira que f est continue en x si

$$\forall \varepsilon, \exists \alpha \,,\ \|y-x\| \leqslant \alpha \text{ et } y \in U \Rightarrow \|f(y)-f(x)\| < \varepsilon$$

<u>proposition</u> les conditions suivantes sont équivalentes

(i) f continue en x

(ii) $\forall \varepsilon, \exists \alpha \,;\ f^{-1}(B(x,\varepsilon)) \supset U \cap B(x,\alpha)$

(iii) $\forall G \in \mathcal{V}(f(x)) \,,\ f^{-1}(G) \in \mathcal{V}^{U}(x)$

(iv) pour toute suite $\{x_n\} \to x$ où $x_n \in U$, alors

$$f(x_n) \to f(x)$$

◀ (iv) $\Rightarrow$ (iii) Supposons que $f^{-1}(G) \notin \mathcal{V}^{U}(x)$, alors il existe $x_n \in f^{-1}(G)$ tel que $x_n \to x$. Mais alors $f(x_n) \to f(x)$ et $f(x_n) \notin G$ donc $G \notin \mathcal{V}(x)$.

On a le resultat par contraposé.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) prenons $G = B(f(x),\varepsilon)$; alors $f^{-1}(G) \in \mathcal{V}^{U}(x)$ et donc par definition, il existe α tel que $B(x,\alpha) \subset f^{-1}(G) = f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$

(ii) $\Rightarrow$ (i) dire que $f^{-1}(B(f(x),\varepsilon)) \supset B(x,\varepsilon)$ entraine

si $\|y-x\| \leqslant \varepsilon \Rightarrow y \in B(x,\varepsilon) \Rightarrow f(y) \in B(f(x),\varepsilon) \Rightarrow \|f(x)-f(y)\| \leqslant \varepsilon$ ▶

Exemple : $x \longmapsto \|x\|$ est continue en tous pts

Une application de $U \subset E \to F$ est continue si elle est continue en tout pt de U

proposition [admise] on a les equivalences suivants

(i) f continue

(ii) f^{-1}(ouvert) est ouvert

(iii) f^{-1}(fermé) est fermé

(iv) pour toute suite $x_n \to y$, $f(x_n) \to f(y)$

◀ cela suit de la proposition précedente ▶

2. propriétés élémentaires des fonctions continues.

proposition Soit $f, g : U \to F$ continue en x, $\lambda : U \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ continue en x, alors $\lambda \cdot f$ et $f+g$ sont continues en x.

◀ utilisez la caractérisation séquentielle ▶

proposition [composition d'applications continues]

Soit $f : U \subset E \to F$; soit $g : V \subset F \to G$ $f(U) \subset V$. Alors f continue en x, g continue en $f(x)$ entraîne $g \circ f$ continue en x.

◀ On va simplement démontrer $f : E \to F$; $g : F \to G$ continue entraîne $g \circ f$ continue. Soit U un ouvert de G, alors $g^{-1}(U)$ est un ouvert de F, et $f^{-1}(g^{-1}(U))$ est un ouvert de E.

Or : $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$. ▶

3. Homéomorphismes.

Soit $f : U \subset E \to V \subset F$, f est un homéomorphisme si

(i) f est bijective de $U \to V$

(ii) f est continue

(iii) f^{-1} est continue.

Exemple : (i) $f : \mathbb{R}^+ \times]0, 2\pi[\to \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$
$(r, \theta) \mapsto e^{ir\theta}$, est un homéomorphisme.

(ii) $f : \mathbb{R} \to]-1, 1[$, $x \mapsto th(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^x}$ est un homéomorphisme

(iii) le disque épointé $D^* = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$ est homéomorphe au cylindre $C = \{(z, r) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid z^2 = 1\}$ Par l'application $z \mapsto \left(\frac{z}{|z|}, |z|\right)$

4. Applications linéaires continues

On a les équivalences suivantes

<u>proposition</u> Soit $f : E \to F$ linéaire

(i) f continue

(ii) f continue en 0

(iii) Il existe A, $\|f(x)\| \leqslant A \cdot \|x\|$

◀ (i) ⇒ (ii), (ii) ⇒ (iii). En effet ; il existe B tel que

$$\|x\| \leqslant B \Rightarrow \|f(x)\| \leqslant 1$$

Alors soit x quelconque et $y = \frac{x}{\|x\|} \cdot B \quad (x \neq 0)$

Alors $\|y\| \leqslant B$; donc $\|f(y)\| \leqslant 1$. Or $f(y) = \frac{1}{\|x\|} \cdot f(x)$

Donc $\left\| \frac{f(x)}{\|x\|} \cdot B \right\| \leqslant 1$, et ainsi $\|f(x)\| \leqslant \frac{1}{B} \cdot \|x\|$.

(iii) ⇒ (i) [On utilise la caractérisation séquentielle]. ▶

Exemples 1) $\| \ \|^0$ et $\| \ \|^1$ sont équivalentes si et seulement si Id est un homéomorphisme . [En particulier il existe des applications linéaires non continues]

2) Si $f : (E, \| \ \|^0) \to (F, \| \ \|^1)$ est continue

et $\| \ \|^1 \sim \| \ \|^3$, $\| \ \|^0 \sim \| \ \|^2$

alors $f : (E, \| \ \|^2) \to (F, \| \ \|^3)$ est continue

3) $f \mapsto f(0)$ est continue pour $(C^0([0,1], \mathbb{R}), \| \ \|_\infty)$

4) $f \mapsto f(0)$ n'est pas continue pour $(C^0[0,1], \mathbb{R}, \| \ \|_1)$

<u>proposition</u> Soit E de dimension finie et f linéaire $E \to F$; alors f est continue pour E muni de $\| \ \|_\infty$ et F de n'importe quelle norme.

◀ Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $x = \sum_{i=1}^{n} x^i \cdot e_i$, avec $x_i \in \mathbb{R}$.

$$\| f(x) \| = \| \sum_i f(x^i \cdot e_i) \| \leqslant \sum_i \| x_i f(e_i) \| \leqslant n \cdot \sup_{i \in \{1,n\}} \| f(e_i) \| \cdot \sup_{i \in \{1,n\}} \| x_i \|$$

On a donc $\| f(x) \| \leqslant A \cdot \| x \|_\infty$, avec $A = n \cdot \sup_i \| f(e_i) \|$ ▶

3. La norme d'une application linéaire continue

Soit $f \in L(E,F)$ une application linéaire continue entre $(E, \| \ \|_E)$ et $(F, \| \ \|_F)$

On définit alors

$$\| f \|_\infty := \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\| f(x) \|}{\| x \|}$$

On vient de voir que $\| f \|_\infty < \infty$ si f est continue

Proposition : $f \mapsto \| f \|_\infty$ est une norme sur $L(E,F)$

◀ exercice facile ▶