La différentielle

Notation : soit $f : E \to F$ (e.v.n) ; on dit $f \in o(h)$ si $\lim_{h \to 0} \frac{\|f(h)\|}{\|h\|} = 0$.

1. Vecteur tangent à une courbe

Soit $(E, \| \ \|)$ un e.v.n. Une courbe ou chemin est une application continue

$$c : I \to E \quad \text{où } I = [a,b]$$

La courbe est différentiable en $t_0 \in I$ de vecteur tangent $\dot{c}(t_0)$

si $$\lim_{t \to t_0} \frac{c(t) - c(t_0)}{t - t_0} = \dot{c}(t_0)$$

On note aussi $\dot{c}(t_0) = c'(t_0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} c(t)$

Si E est de dimension finie et identifié à $\mathbb{R}^n$ de telle sorte que

$$c(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t)) \ ; \quad \text{Alors}$$

proposition c différentiable en $t_0 \Leftrightarrow \forall i$, c_i dérivable en t_0

et alors $\dot{c}(t_0) = (c_1'(t_0), \dots, c_n'(t_0))$

2. la différentielle

Soit $(E, \| \ \|_E)$ et $(F, \| \ \|_F)$ deux e.v.n et

$f : U \subset E \to F$; où U est un ouvert de E

f est différentiable en $u_0 \in U$ de différentielle

$D_{u_0} f \in L^c(E, F)$ (application linéaires continue)

Si il existe une fonction $\varepsilon : W \in V(0) \subset E$ telle que

$$f(u_0 + h) = f(u_0) + D_{u_0} f(h) + \varepsilon(h) \ ; \quad \text{où } \varepsilon(h) \in o(h)$$

Exemple i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en x_0, alors

$$(D_{t_0} f)(u) = f'(t_0) \cdot u$$

ii) $c : I \to \mathbb{R}$ différentiable en x_0, alors

$$(D_{x_0} c)(u) = u \cdot \dot{c}(x_0)$$

proposition [uniaté de la differentielle]

Si $f(x+h) = f(x) + A \cdot h + o_1(h) = f(x) + B \cdot h + o_2(h)$, avec o_1 et $o_2 \in o(h)$

et A et B lineaires alors $A = B$.

◀ En effet $(A-B)(h) = o(h)$. Donc

$$(A-B)(u) = \frac{(A-B)(\varepsilon u)}{\varepsilon} = \frac{o(\varepsilon u)}{\varepsilon} \quad (\text{pour } \varepsilon > 0)$$

Donc comme $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{o(\varepsilon u)}{\varepsilon} = 0$; On a $(A-B)(u) = 0$ et donc $A = B$ ▶

3. Premier theorèmes

Theorème

| f différentiable en $x_0 \Rightarrow f$ continue en x_0

Theorème

| f differentiable en a, g differentiable en $f(a)$ alors
| $g \circ f$ différentiable en a et $D_a(g \circ f) = D_{f(a)} g \circ D_a f$

exemple : $(f \circ g)' = g' \circ f \cdot f'$

◀ On écrit $f(a+h) = f(a) + A \cdot h + o_1(h)$; avec $A = D_a f$

$g(f(a)+u) = g f(a) + B \cdot u + o_2(u)$; où $B = D_{f(a)} g$

On a donc

$$g(f(a+h)) = g(f(a) + \underbrace{A(h) + o_1(h)}_{u(h)})$$

$$= g f(a) + A \cdot B \cdot h \quad + \underset{①}{B \cdot o_1(h)} \quad + \underset{②}{o_1(u(h))}$$

Pour ① :

$\frac{1}{\|h\|} \cdot B(o_1(h)) = B\left(\frac{o_1(h)}{\|h\|}\right) \xrightarrow{h \to 0} 0$; car $\frac{o_1(h)}{\|h\|} \to 0$ et B continue

donc $B_1 \cdot o_1(h) \in o(h)$.

Pour ②

ensuite $\frac{\|u(h)\|}{\|h\|} = \left\| A\left(\frac{h}{\|h\|}\right) + \frac{\theta_1(h)}{\|h\|} \right\| \leqslant \|A\|_\infty + \frac{\|\theta_1(h)\|}{\|h\|}$

Comme $\frac{\theta_1(h)}{\|h\|} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$; pour h suffisamment petit $\frac{\|\theta_1(h)\|}{\|h\|} \leqslant 1$

Ainsi pour h petit en norme, $\|u(h)\| \leqslant (\|A\|_\infty + 1) \|h\|$

En particulier, (i) : $\lim_{h \to 0} u(h) = 0$

(ii) $\frac{\|\theta_1(u(h))\|}{\|h\|} \leqslant \frac{\|\theta(u(h))\|}{\|u(h)\|} \cdot \frac{\|u(h)\|}{\|h\|} \leqslant \frac{\|\theta_1(u(h))\|}{\|u(h)\|} (\|A\|_\infty + 1)$

En conclusion

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|\theta_1(u)\|}{\|h\|} = 0 \text{ ; ainsi } \theta_1(u(h)) \in o(h)$$

Ainsi ① + ② $= o(h)$ et donc

$$g(f(a+h)) = gf(a) + A \cdot B \cdot h + o(h)$$

comme $A \cdot B$ est continue, $g \circ f$ est differentiable de differentielle $A \circ B$

$= D_{f(a)} g \circ D_a f$. ▶

4. Derivée partielles

Soit $E \approx \mathbb{R}^n$, et f $U \subset E \to F$, U ouvert

f admet une derivée partielle $\partial_u f(x_0)$ de la direction u en x_0, où $u \in E$

si $t \mapsto f(x_0 + tu)$ est differentiable en 0 de vecteur tgt $\partial_u f(x_0)$

si $E \approx \mathbb{R}^n$ par rapport à une base $(e_1, \dots, e_n)$ on note

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(t_0) = \partial_i f(t_0) = \partial_{e_i} f(t_0)$$

Proposition | Si f est differentiable en x_0, elle admet des dérivées partielles dans toutes les directions et $\partial_u f(x_0) = D_{x_0} f(u)$

Enfin $D_x f(v_1, \dots, v_n) = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$.

la réciproque est plus délicate et suppose E de dimension finie

<u>Théorème</u> Si f admet des dérivés partielles $\frac{\partial}{\partial x_i} f$ continues au $\mathcal{V}(x_0)$

Alors f est différentiable en x_0 et

$$D_{x_0} f(u) = \sum_{i=1}^{m} u_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$

où $u = (u_1, \dots, u_n)$

◀ Pour simplifier on peut toujours supposer que $x_0 = 0$ et les $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont continues sur $V_{\alpha_0} :=]-\alpha_0, \alpha_0[^m$ avec $\alpha_0 > 0$.

On remarque alors que si $x \in V_{\alpha_0}$, et $x + te_i \in V_\alpha$ alors

$$f(x) - f(x+te_i) = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+se_i)\, ds$$

$$f(x+te_i) - f(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)\, t = \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(0) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+se_i)\right) ds =: \varepsilon_i(x,t)$$

$\sim$

Si les $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont continue, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe α tel que

$$x \in V_\alpha \Rightarrow \forall i, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)\right| < \varepsilon$$

Et en particulier si $x \in V_\alpha$ et $x + te_i \in V_\alpha$

Alors :

$$|\varepsilon_i(x,t)| \leqslant \varepsilon \cdot |t|$$

$\sim$

Après ce préliminaire, si $x = (x_1, \dots, x_n) \in V_\alpha$

Posons $y_i = (x_1, \dots, x_i, 0, \dots, 0)$.

Alors $f(x) - f(0) = \sum_{i=1}^{m} f(y_i) - f(y_{i-1})$ Et donc

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \cdot x_i &= \sum_{i=1}^{m} \left(f(y_i) - f(y_{i-1}) - \frac{\partial f(0)}{\partial x_i}(x_i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(f(y_{i-1} + x_i e_i) - f(y_{i-1}) - \frac{\partial f(0)}{\partial x_i} \cdot x_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i(y_{i-1}, x_i) \end{aligned}$$

Ainsi $\left| f(x) - f(0) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \cdot x_i \right| \leqslant \alpha \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i| \right)$

Posons alors $D_0 f(u) = \sum_i u_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$

On vient de montrer que si on pose

$$g(x) = f(x) - f(0) - D_0 f(u)$$

Alors $\forall \varepsilon, \exists \alpha$ tel que $\|x\| < \alpha \Rightarrow \|g(h)\| \leqslant \varepsilon \|h\|$

Autrement dit $g(h) \in o(h)$. ▶

5. Application C^1

Soit $f : U \subset E \to F$ où U est un ouvert, E, F des e.v.n

f est de classe C^1 sur U si

(i) f est différentiable en tt point de U

(ii) $Df : x \mapsto D_x f$; $U \to (\mathcal{L}^c(E,F), \| \ \|_\infty)$ est continue.

proposition : en dimension finie

f de classe C^1 sur U $\Leftrightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ continue sur U

Exemple

La fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $(x,y) \mapsto xy$ est C^1. En effet $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = y$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x$ qui sont toutes les deux continues (car linéaires)

6. Différentiabilité : propriétés et exemples important

Nous résumons dans un théorème quelques résultats importants permettant de montrer la différentiabilité en x_0

[On rappelle que si F est un e.v.n muni de la norme $\| \ \|_F$. On munit F^p de la norme $\|(u_1, \dots, u_p)\| = \sup \|u_i\|_F$. Alors $x_n = (x_n^1, \dots, x_n^p)$ converge vers $y = (y^1, \dots, y^p)$ si et seulement si pour tout i (x_n^i) converge vers y^i]

Théorème

(i) si A est linéaire continue de E dans F, alors A est C^1 et $D_x A = A$

(ii) Si $\varphi = (f_1, \dots, f_p) : E \to F^p$. Alors φ est différentiable en x_0 (respectivement C^1) si et seulement si les f_i le sont.

(iii) Si f et $g : E \to \mathbb{R}$ sont différentiables en x_0, alors $\Phi = f \cdot g$ l'est aussi et

$$D_x \Phi = f(x) D_x g + g(x) D_x f$$

(iv) De m, si $f, g : E \to F$ sont différentiables en x_0, alors $\Psi = f+g$ est différentiable en x_0 et $D_x \Psi = D_x f + D_x g$

Nous ne répétons pas ici le critère sur les dérivées partielles et la propriété de composition.

◀ (i) On a $A(x+h) = A(x) + A(h)$; comme A est linéaire continue, on a bien $A(x+h) = A(x) + D_x A(h) + o(h)$ avec $o(h) = 0$ et $D_x A = A$.

(ii) supposons f différentiable. Soit alors π_i la projection $\pi_i(z_1, \dots, z_p) = z_i$. Alors π est linéaire continue car $\|\pi(z)\| \leqslant \|z\|$. Donc par composition $f_i = \pi_i \circ f$ est différentiable. Récipr uement supposons les f_i différentiables ; on a donc $f_i(x+h) = f_i(x) + D_{x_i} f(h) + o_i(h)$, ou $o_i(h) \in o(h)$

Posons alors $A \cdot h = (D_x f_1(h), \dots, D_x f_p(h))$. Alors A est linéaire et continue [vérifiez que $\|A\|_\infty \leqslant \operatorname{Sup} \|D_x f_i\|_\infty$]. On a alors

$$f(x+h) = f(x) + A(h) + o(h) \text{ avec } o(h) = (o_1(h), \dots, o_p(h))$$

Vérifiez alors que $\lim \frac{o(h)}{h} = 0$. Autrement dit f est différentiable de différentielle A.

(iii) On sait que $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto xy$ est C^1, d'après (ii) : $H : z \mapsto (f(z), g(z))$ est différentiable en x_0. Donc $z \mapsto \varphi \circ H(z) = f(z) \cdot g(z)$ est différentiable en x_0.

Par ailleurs $D_z H(h) = (D_z f(h), D_z g(h))$; $D_{u_1, u_2} \varphi(h_1, h_2) = u_1 \cdot h_2 + u_2 \cdot h_1$

$$\text{Donc } D_z(\varphi \circ H)(h) = D_{H(z)} \varphi \circ D_z H(h) = f(D_x g)(h) + g(D_x f) h$$

...

(iv) Exercice ▶

7. la matrice jacobienne

Soit $F = (f_1, \cdots, f_n) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$.

proposition la matrice de $D_x F$ est la matrice jacobienne

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{ij}$$

◀ ceci est une conséquence du fait que

$$D_x f(v_1, \ldots, v_p) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot v_i$$ ▶

① comme $0 \in J_\varepsilon$, on a $t_0 \geqslant 0$

② Par continuité de f $\|f(x) - f(y_{t_0})\| \leqslant (M+\varepsilon)\|x - y_{t_0}\|$

③ · On peut écrire puisque f est différentiable en y_{t_0}, qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $\|h\| \leqslant \alpha$; alors $\|f(y_{t_0}+h) - f(y_t) - D_{y_t}f \cdot h\| \leqslant \varepsilon\|h\|$

et donc $\|f(y_{t_0}+h) - f(y_{t_0})\| \leqslant \varepsilon\|h\| + \|D_{y_t}f\| \cdot \|h\| \leqslant (\varepsilon + M) \cdot \|h\|$

Supposons maintenant (par l'absurde) que $t_0 < 1$. Il existe alors $s_0 \leqslant 1$ tel que

$$\forall s \in [t_0, s_0] \; ; \; \|y_t - y_s\| = (s-t)\|x-y\| \leqslant \varepsilon$$

Alors $\|f(y_s) - f(y_{t_0})\| \leqslant (M+\varepsilon)\|y_s - y_{t_0}\| = (M+\varepsilon)(s-t_0) \cdot \|x-y\|$.

Et donc
$$\|f(x) - f(y_s)\| \leqslant \|f(x) - f(y_t)\| + \|f(y_s) - f(y_t)\|$$
$$\leqslant (M+\varepsilon) \cdot (t_0\|x-y\| + (s - t_0) \cdot \|x-y\|$$
$$\leqslant (M+\varepsilon)[s \cdot \|x-y\|]$$

Nous venons de montrer que $\forall s \in [t_0, s_0]$, $s \in J_\varepsilon$. Par définition $\forall s \in [0, t_0]$ $s \in J_\varepsilon$. Donc $\forall s \in [0, s_0]$, $s \in J_\varepsilon$. Autrement dit $s_0 \leqslant t_0$ et la contradiction. Ainsi $t_0 = 1$ et donc

Donc $\forall \varepsilon > 0$ $\|f(x) - f(y)\| \leqslant (M+\varepsilon)\|x-y\|$,

En faisant tendre ε vers 0, on obtient le théorème des AF ▶