Accroissements finis et application

1. Théorème des accroissements finis.

Theorème des accroissements finis

On suppose $f : U \subset E \to F$; E, F e.v.n f de classe C^1

(i) U convexe

(ii) il existe M tel que $\forall x \in U, \|D_x f\|_\infty \leqslant M$

Alors pour tout $x, y \in U$;

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant M \cdot \|x-y\|$$

◀ Soit $\varepsilon > 0$; On va montrer que $\|f(x) - f(y)\| \leqslant (M+\varepsilon)\|x-y\|$

Pour tout $t \in [0,1]$ posons $y_t = ty + (1-t)x$. Par hypothèse $y_t \in U$

Soit $J_\varepsilon = \{ t \mid \|f(x) - f(y_t)\| \leqslant (M+\varepsilon)\, t\, \|x-y\| \}$

Soit maintenant $t_0 = \inf \{ t \mid \forall s, 0 \leqslant s \leqslant t \Rightarrow s \in J_\varepsilon \}$

① comme $0 \in J_\varepsilon$, on a $t_0 \geqslant 0$

② Par continuité de f $\|f(x) - f(y_{t_0})\| \leqslant (M+\varepsilon)\|x - y_{t_0}\|$

③ · On peut écrire puisque f est différentiable en y_{t_0}, qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $\|h\| \leqslant \alpha$; alors $\|f(y_{t_0}+h) - f(y_t) - D_{y_t} f \cdot h\| \leqslant \varepsilon\|h\|$

et donc $\|f(y_{t_0}+h) - f(y_{t_0})\| \leqslant \varepsilon\|h\| + \|D_{y_t} f\| \cdot \|h\| \leqslant (\varepsilon + M)\|h\|$

Supposons maintenant (par l'absurde) que $t_0 < 1$. Il existe alors $s_0 \leqslant 1$ tel que

$\forall s \in [t_0, s_0]$; $\|y_t - y_s\| = (s-t)\|x-y\| \leqslant \varepsilon$

Alors $\|f(y_s) - f(y_{t_0})\| \leqslant (M+\varepsilon)\|y_s - y_{t_0}\| = (M+\varepsilon)(s-t_0) \cdot \|x-y\|$.

Et donc $\|f(x)-f(y_s)\| \leqslant \|f(x)-f(y_t)\| + \|f(y_s)-f(y_t)\|$

$$\leqslant (M+\varepsilon)\cdot\left(t_0\|x-y\| + (s-t_0)\cdot\|x-y\|\right)$$

$$\leqslant (M+\varepsilon)\left[s\cdot\|x-y\|\right]$$

Nous venons de montrer que $\forall s\in[t_0,s_0]$, $s\in J_\varepsilon$. Par définition $\forall s\in[0,t_0]$ $s\in J_\varepsilon$. Donc $\forall s\in[0,s_0]$, $s\in J_\varepsilon$. Autrement dit $s_0\leqslant t_0$ et la contradiction. Ainsi $t_0=1$ et donc

Donc $\forall\varepsilon>0$ $\quad \|f(x)-f(y)\|\leqslant(M+\varepsilon)\|x-y\|$,

En faisant tendre ε vers 0, on obtient le théorème des AF ▶

2. Connexité et application du TAF

Soit U un ouvert d'un e.v.n E (ou plus généralement d'un espace topologique). On dit que U est connexe si chaque fois que l'on peut écrire

$$U = U_0\cup U_1 \text{ avec } U_0, U_1 \text{ ouvert et } U_1\cap U_0=\emptyset$$

alors soit $U_0=\emptyset$, soit $U_1=\emptyset$.

Plus généralement, U est un sous ensemble de E, U est connexe si chaque fois que l'on peut écrire $U=U_0\cup U_1$ avec $U_i=O_i\cap U$ (où O_i est ouvert) et $U_0\cap U_1=\emptyset$

Alors soit $U_0=\emptyset$ soit $U_1=\emptyset$

Exemples 1) U ouvert connexe de $\mathbb{R} \Leftrightarrow U$ intervalle

2) U convexe $\Rightarrow U$ connexe

Théorème Soit $\varphi : U\subset E\to F$, où E et F sont des e.v.n, φ de classe C^1 supposons $\forall x\in U$, $D_x\varphi=0$; alors si U est un ouvert connexe, φ est constante sur U.

Remarque (1) le théorème est faux si $\mathcal{U}$ n'est pas connexe (pourquoi ?)

Nous allons démontrer tout d'abord un cas particulier.

Theorème : vrai si $\mathcal{U}$ est convexe

◀ c'est une conséquence du TAF : $\forall x, y \in \mathcal{U}$

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leqslant M \cdot \|x - y\|$$

Avec $M = \sup_{x \in \mathcal{U}} \|D_x \varphi\|_\infty = 0$.

Donc $\varphi(x) = \varphi(y)$ ▶

Démontrons le théorème par étape.

■ première étape $\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \mathcal{U}, \text{ il existe un voisinage } V \text{ de } x \text{ tel que} \\ \forall y \in V, \ \varphi(y) = \varphi(x) \end{array} \right.$

◀ en effet, il existe $r > 0$, tel que $B(x, R) \subset \mathcal{U}$. Comme $V = B(x, R)$ est convexe, le cas particulier assure que $\forall y \in V$, $\varphi(y) = \varphi(x)$ ▶

Soit alors $x_0 \in \mathcal{U}$ et $\mathcal{U}_0 = \{x \mid \varphi(x) = \varphi(x_0)\}$

deuxième étape $\{ \mathcal{U}_0$ est ouvert.

◀ en effet soit $x \in \mathcal{U}_0$, alors $\exists V$ un $\mathcal{V}(x)$, $V \subset \mathcal{U}$ tq $\forall y \in V$ $\varphi(y) = \varphi(x) = \varphi(x_0)$. Donc $V \subset \mathcal{U}_0$ ▶

Soit $U_1 = \{x \mid \varphi(x) \neq \varphi(x_0)\}$. Par continuité de φ, U_1 est ouvert.

Or $\mathcal{U} = U_0 \cup U_1$ avec $U_1 \cap U_0 = \emptyset$. Comme $U_0 \neq \emptyset$, on en déduit $U_1 = \emptyset$. Donc $\forall x$, $\varphi(x) = \varphi(x_0)$ ■