La différentielle seconde.

I) Rappels d'algèbre (multilinéaire)

1-a) Definition

Une application F de $E_1 \times E_2 \to F$, où E_1 et F sont des e.v, est bilinéaire si (i) $\forall u_1 \in E_1$, l'application $F^1_{u_1} : E_2 \to F$; $u \mapsto F(u_1, u)$ est linéaire

(ii) $\forall u_2 \in E_2$, l'application $F^2_{u_2} : E_1 \to F$; $u \mapsto F(u, u_2)$ est linéaire.

Exemples

(i) : l'application $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_q[X] \to \mathbb{R}_{n+q}[X]$ $(P(X), Q(X)) \mapsto P(X) \cdot Q(X)$

(ii) l'application $M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ $A, B \mapsto tr(AB)$ est bilinéaire

(iii) l'application $M_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $(A, u) \mapsto A(u)$ est bilinéaire.

1-b) Continuité

Si maintenant E_1, E_2, F sont des e.v.n, en munissant $E_1 \times E_2$ de la norme $(\|(u_1, u_2)\| = \sup(\|u_1\|, \|u_2\|)$ cela a un sens de se demander si une application bilinéaire est continue. On a alors

Proposition : $F : E_1 \times E_2 \to F$ bilinéaire est continue si il existe une constante K telle que $\|F(u_1, u_2)\| \leq K \cdot \|u_1\| \cdot \|u_2\|$. Si E_1 et E_2 sont de dimension finie alors toute application bilinéaire $E_1 \times E_2 \to F$ est continue

[exercice]

1-c) Un isomorphisme

Notons $L(E_1, E_2 ; F)$ l'espace des applications bilinéaires $E_1 \times E_2 \to F$. Notons $\forall u \in E_1$, $F^1_u : v \mapsto F(u, v)$; $F^1_u \in L(E_2, F)$

$\forall w \in E_2$; F^2_w $v \mapsto F(v, w)$; $F^2_u \in L(E_1, F)$

Proposition L'application $F^1 : u \mapsto F^1_u$; $E_1 \to L(E_2, F)$ est linéaire

de même l'application $F^2 : v \mapsto F^2_v$; $E_2 \to L(E_1, F)$ est linéaire

Enfin les applications

$$F \mapsto F^1 \qquad \text{et} \qquad F \to F^2$$

$$L(E_1, E_2 ; F) \to L(E_1, L(E_2, F)) \qquad L(E_1, E_2 ; F) \to L(E_2, L(E_1, F))$$

sont des isomorphismes d'espaces vectoriels.

Si E_1, E_2, F sont des e.v.n et l'indice "c" dénote la continuité.

On a alors des isomorphisme

$$L^c(E_1, E_2 ; F) \longrightarrow L^c(E_1, L^c(E_2, F))$$

2. la differentielle seconde.

Soit $f : E \to F$ (e.v.n) une application de classe C^1 au $V(x_0)$. L'application f est **deux fois différentiables** en x_0, si $x \mapsto D_x f$; $E \to L(E, F)$ est differentiable en x_0. La **différentielle seconde** est notée $D^2_{x_0} f$ et considerée comme un element de $L^c(E, E ; F)$

proposition

$$D^2_{x_0} f(u, u) = \frac{d}{dt^2}\Big|_{t=0} f(x_0 + tu)$$

$$D_{x_0} f(u, v) = \frac{d}{dt} D_{x+tu} f(v)$$

Soit $f : E \to F$, on suppose E de dimension fini, on pose alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(m) = D^2_m f(e_i, e_j) \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(m) = D^2_m f(e_i, e_i)$$

Où $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E

proposition si $u=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $v=\sum_{i=1}^{n} y_i e_i$; on a

$$D^2_m f(u,v) = \sum_{i=1, j=1}^{n} x_i y_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$$

Quelques exemples et propriétés

(1) Soit $f : E \to F$ deux fois différentiable en m , $u,v \in E$ et

$g(s,t) = f(m+su+tv)$; $g : \mathbb{R}^2 \to F$

Alors $\frac{\partial g}{\partial s \partial t}(0,0) = D^2_m f(u,v)$

(2) Soit $f : C^2 : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors

$$D^2_x f(u,v) = u \cdot v \cdot f''(x)$$

(3) Soit A bilinéaire continue de $E \times E \to F$ et $\hat{A} : E \to F$; $\hat{A}(u) = A(u,u)$

Alors $D^2_x \hat{A}(u,v) = A(u,v) + A(v,u)$; $D_x \hat{A}(u) = A(x,u) + A(x,u)$

◀ On a $\hat{A}(x+h) = \hat{A}(x) + A(x,h) + A(h,x) + A(h,h)$

comme $\|A(h,h)\| \leqslant K\|h\|^2$ pour une certaine constante K ; $A(h,h) \in o(h)$

Donc $D_x \hat{A}(h) = A(x,h) + A(h,x)$ car linéaire continue.

$\Psi : x \mapsto A(x,\cdot) + A(\cdot,x) : E \to L(E,F)$ est linéaire

et continue, car A est bilinéaire continue. Dès lors Ψ est C^1 donc

$\hat{A}$ est 2x différentiable. Alors on peut utiliser 1)

Soit $g(s,t) = \hat{A}(x+su+tv) = \hat{A}(x) + s(A(x,u) + A(u,x)) +$

$t(A(x,v) + A(v,x)) + st(A(u,v) + A(v,u))$.

Donc $D^2_x \hat{A}(u,v) = \frac{\partial}{\partial s \partial t} g(0,0) = A(u,v) + A(v,u)$ ▶

3) Applications de classe C^2.

Une application f est de classe C^2 sur U si elle admet une différentielle seconde $D^2_m f$ en tout point de U et si $m \mapsto D^2_m f$ est continue

proposition si E est de dimension finie, f est de classe C^2 si toutes dérivées partielles d'ordre 2 : $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ existent et sont continues.

4) le théorème de Schwarz

Théorème [Schwarz] Supposons f de classe C^2 au $V(m)$.

On a $D^2_m f(u,v) = D^2_m f(v,u)$

de manière équivalente $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ $\forall i,j$.

Commençons par un cas particulier

Soit $g : \mathbb{R}^2 \to F$, telle que $g(0,0)=0$, $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)=0$; $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)$

Soit $A = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(0)$; $B = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0)$ g de classe C^2.

Nous allons montrer $A = B$.

Tout d'abord nous avons

① il existe $\alpha > 0$, tq $|u| < \alpha$; $|v| < \alpha \Rightarrow \left\| A - \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(u,v) \right\| \leq \varepsilon$

◀ En effet, g est de classe C^2, donc $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$ est continue au $V(m)$ ▶

Considérons $\forall x$ la fonction $\varphi^x(y) = \frac{\partial g}{\partial x}(y,x) - y \cdot A$

② si $|y| < \alpha$; $|x| < \alpha$ alors $\|\varphi^x(y)\| \leqslant \varepsilon \cdot |y|$

◀ En effet $\|\frac{d}{dy}\varphi^x(y)\| = \|\frac{\partial g}{\partial y \partial x}(y,x) - A\| \leqslant \varepsilon$; donc le TAF entraîne que

$$\|\varphi^x(y) - \underset{\overset{\|}{0}}{\varphi^x(0)}\| \leqslant \varepsilon \cdot |y| \; ▶$$

Soit maintenant $\psi^y(x) = g(y,x) - xyA$.

③ si $|x| < \alpha$, $|y| < \alpha$; alors $\|\psi^y(x)\| \leqslant \varepsilon \cdot |x| \cdot |y|$

◀ en effet $\frac{d}{dx}\psi^y(x) = \frac{\partial}{\partial x}g(y,x) - yA = \varphi^x(y)$

donc $\|\frac{d}{dx}\psi^y(x)\| \leqslant \varepsilon \cdot |y|$

donc d'après le TAF, on obtient

$$\|\psi^y(x) - \underset{\overset{\|}{0}}{\psi^y(0)}\| \leqslant (\varepsilon |y|) \cdot |x|.$$

④ Conclusion. on vient de montrer $\|g(x,y) - xyA\| \leqslant \varepsilon \cdot |x| \cdot |y|$

En échangeant les rôles de x et y on a $\|g(x,y) - xyB\| \leqslant \varepsilon |x| \cdot |y|$

donc $|Axy - Bxy| \leqslant \varepsilon |x| \cdot |y|$

ainsi (en prenant $x \neq 0$ et $y \neq 0$)

$|A - B| \leqslant \varepsilon$; Ceci étant vrai pour tout ε on a $A = B$

◀ Démonstration du théorème de Schwarz.

On pose $g(x,y) = f(m + xu + yv) - x D_m f(u) - y D_m f(v) - f(m)$

Alors $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = D_m f(u) - D_m f(u) = 0$

$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = D_m f(v) - D_m f(v) = 0$

et $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0) = D^2_m f(u,v)$; $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0) = D^2 f(v,u)$

Le cas général suit du cas particulier ▶