# Le théorème des fonctions implicites et les extrema liés.

## 1. Position du problème

On considère l'équation (à 2 variables) $f(x,y)=0$
On considère cette équation, comme une équation en $x$, dépendant d'un paramètre $y$.
On suppose connue une solution $(y_0,x_0)$ et on cherche une solution $x(y)$
pour $y$ proche de $y_0$, la fonction $y \mapsto x(y)$ ayant une bonne régularité.

## 2. A nouveau les dérivées partielles.

On se donne $\varphi : C^1 : U\times V \to G$ ; où $U, V$ sont des ouverts de $E, F$ e.v.n.
pour tout $f$ de $F$, on note $\varphi^f : e \mapsto \varphi(f,e)$
pour tout $e$ de $E$ on note $\varphi_e : f \mapsto \varphi(f,e)$

Alors on pose $\partial^1_{(e,f)}\varphi := D_e\varphi^f \in L(E,G)$

$$\partial^2_{(e,f)}\varphi := D_f\varphi_e \in L(F,G)$$

On a bien sûr $D_{(e,f)}\varphi(u,v) = \partial^1_{e,f}\varphi(u) + \partial^2_{e,f}\varphi(v)$

rque si $E=F=\mathbb{R}$ ; $\partial^1\varphi(u) = u\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ ; $\partial^2\varphi(v) = v\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}$.

## 3. Le théorème de la fonction implicite

Théorème Soit $E, F, G$ des espaces de Banach.

Soit $U, V$ des ouverts de $E$ et $F$ respectivement et $\varphi$ de classe $C^1$ de $U\times V \to G$.
Soit $(x_0,y_0) \in E\times F$ et supposons

a) $\varphi(x_0,y_0)=0$ ; b) $\partial^1_{x_0,y_0}\varphi$ est continue et d'inverse continue $E\to G$ ;

Alors, il existe un voisinage $W$ de $y_0$, $\mathcal{O}$ de $(x_0,y_0)$ et $\psi : W \to U$ tel que

$$\begin{cases}\varphi(x,y)=0\\ (x,y)\in\mathcal{O}\end{cases} \iff \begin{matrix} x=\psi(y) \\ y\in W\end{matrix}$$

En particulier, $\varphi(\psi(y),y)=0$, $\psi$ est la « fonction implicite » donnant les solutions de l'équation (en $x$), $\varphi(x,y)=0$ en fonction du paramètre $y$.

Exemple On suppose que $\lambda_0$ est racine simple du polynome $P(X)=0$ ou
$P(X)=\sum_{i=0}^{n} a_i^0 X^i$. Montrons qu'il existe une fonction
$\Lambda: \mathcal{O}\subset\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$; où $\mathcal{O}$ est un voisinage de $(a_0^0,\dots,a_n^0)$ telle que
$\Lambda(a_0,\dots,a_n)$ est solution de $\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, avec $\Lambda(a_0^0,\dots,a_n^0)=\lambda_0$.
$\cdot v.$

Si $\lambda_0$ est racine simple de $P$, alors $P'(\lambda_0)\neq 0$.

On considère donc l'application $\varphi: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$

$$(\lambda,a_0,\dots,a_n)\mapsto\sum_{i=1}^{n} a_i\lambda^i$$

Alors $\partial^1_{(\lambda_0,a_i^0)}\varphi(\mu)=\mu\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}=\mu\cdot P'(\lambda)$.

Donc $\partial^1_{\lambda_0,a_i^0}$ est bien continue. le TFI s'applique et donne le resultat.

◀ Demonstration du TFI. C'est une consequence du TIL.

Soit $\varphi$ et considerons l'application

$$\Phi: U\times V\to G\times F\ ;\ (e,f)\to(\varphi(e,f),f)$$

Alors

$$D\Phi(u,v)=(D\varphi(u,v),v)$$
$$=(\partial^1\varphi(u)+\partial^2\varphi(v),v)$$

On remarque maintenant $D_{x_0,y_0}\Phi$ est inversible et d'inverse

$$A(w,v)=((\partial^1\varphi)^{-1}(w-\partial^2\varphi(v)),v).$$

On peut applique le TIL et il existe alors un voisinage $\mathcal{O}$ de $(x_0,y_0)$ tel que $\Phi$ est un difféomorphisme de $\mathcal{O}$ sur l'ouvert $\Phi(\mathcal{O})$.

On pose alors

(i) $W = \overline{\Phi(O)} \cap (\{0\} \times F)$. Alors $W$ est un voisinage de $y_0$.

(ii) $\Psi : W \to G$ défini par $(\Psi(y), y) = \Phi^{-1}(0, y)$.

Alors par construction

$$\begin{matrix} (x,y) \in G \\ \varphi(x,y) = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} (x,y) \in O \\ \Phi(x,y) = (0,y) \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} y \in W \\ (x,y) = \Phi^{-1}(0,y) \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} y \in W \\ x = \Psi(y) \end{matrix} \blacktriangleright$$

## 4. La différentielle de la fonction implicite

proposition : supposons que $\varphi, \Psi$ soit $C^1$ et vérifient

$$\varphi(\Psi(y), y) = 0$$

Supposons de plus $\partial^1_{\Psi(m),m} \varphi$ inversible ; alors

$$D_m \Psi = -\left(\partial^1_{\Psi(m),m} \varphi\right)^{-1} \circ \left(\partial^2_{\Psi(m),m} \varphi\right)$$

$\sim$

[Cas particulier]. Si $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $\Psi : V \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors

$$\Psi'(m) = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\Psi(m), m)}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}(\Psi(m), m)}$$

◀ Soit $g(y) = \varphi(\Psi(y), y)$. On a $g(y) \equiv 0$ donc $D_m g = 0$. Or

$D_m g = \partial^1_{\Psi(m),m} \varphi \circ D_m \Psi + \partial^2_{\Psi(m),m} \varphi$. Le résultat suit ▶

## 5. Hypersurfaces

Voici un exemple d'application du TFI. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et soit $\Sigma_1 = f^{-1}(z_0)$.

Proposition : Supposons de plus que $\forall m \in \Sigma_1$, $\frac{\partial f}{\partial x_n}(m) \neq 0$

Alors $\forall m \in \Sigma_1$, il existe un voisinage $O$ de $m$ telle que $O \cap \Sigma_1$ est le graphe d'une fonction ; c'est à dire il existe

(i) $\exists$ un ouvert $W \subset \mathbb{R}^{n-1}$

(ii) $\exists \Psi$ de classe $C^1 : W \to \mathbb{R}$

Tel que $\quad G \cap \Sigma_1' = \{(z, \Psi(z))\}$

4. les extremas liés

Chercher un extrema sous contrainte : On cherche à minimiser la fonction $\varphi$, tout en respectant la contrainte $f = 0$

exemple : on cherche le maximum de la fonction

$$(x_1, \cdots, x_n) \longmapsto x_i \text{ , par } (x_1, \cdots, x_n) \text{ vérifiant } \sum_1 x_i^2 = 1$$

Theoreme . Soit $f : U \subset E \to \mathbb{R}$, Soit $\Sigma_{1 z_0}' = f^{-1}(z_0)$

Soit $\varphi : U \to \mathbb{R}$ . On suppose

(i) $\forall x \in \Sigma_{1 z_0}'$ ; $d_x f \neq 0$

(ii) $\varphi$ et $f$ de classe $C^1$

Supposons que $m_0$ est un extremum local de la fonction $\varphi$ restreinte à $\Sigma_{1 m_0}'$ ; alors

$\exists \lambda$ (le multiplicateur de lagrange) tel que $\quad d_{m_0}\varphi = \lambda d_{m_0} f$.

Exemple : On a ici $f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_1 x_i^2$ ; alors

$$d_x f(u_1, \cdots, u_n) = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 2 \sum_{i=1}^{n} u_i x_i .$$

En particulier si $x \neq 0$ , alors $d_x f \neq 0$

On cherche les points où $d_x \varphi = \lambda d_x f$

or $d_x f = 2(x_1, \cdots, x_n)$ ; $d_x \varphi = (0, \cdots 0, \underset{\uparrow \, i\text{ème place}}{1}, 0, \cdots, 0)$

donc $d_x \varphi = \lambda d_x f \Rightarrow \quad x_j = 0$ si $i \neq j$ .

◀ preuve du théorème. Soit $m_0$ tel que $f(m_0)=z_0$ et $m_0$ extremum local de $\varphi$ sur $\Sigma^1_{z_0}$. On sait que $d_{x_0}f \neq 0$, il existe donc $i \in \{1,\dots,n\}$ tel que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(z_0) \neq 0$. Pour simplifier supposons $i=n$

Alors il existe un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^{n-1}$, $y_0 \in \mathcal{U}$

Alors il existe $\Psi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ telque.

(i) $(y_0, \Psi(y_0)) = m_0$ & (ii) $\forall y \in \mathcal{U}$; $f(y, \Psi(y)) = 0$

On a donc $\forall (u_1, \dots, u_{n-1})$

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} u_i\right] + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_i} u_i = 0$$

Ceci étant vrai $\forall (u_1, \dots, u_{n-1})$. On obtient

$$(*) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} ; \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} = -\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Par ailleurs, si $m_0 = (y_0, \Psi(y_0))$ est extrema de $\varphi$ sur $\Sigma^1_{z_0}$; en particulier

$y_0$ est un point critique de $h : \quad y \mapsto \varphi(y, \Psi(y))$

Donc $D_{y_0} h = 0$ et en particulier

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(y_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(m_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(m_0) \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial y_i}(y_0) = 0$$

Donc en combinant avec $(*)$, il vient

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(m_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n}(m_0) - \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(m_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(m_0) = 0$$

Autrement dit $D_{m_0}\varphi$ et $D_{m_0} f$ sont colinéaires ▶

Exemple : recherche du maximum de la fonction $\varphi(x,y,z) = y\,(x^2 - z^2 - 1)$ sur la sphère $S^2 = \{x^2+y^2+z^2 = 1\}$

On introduit $f : x,y,z \mapsto x^2+y^2+z^2$ et on cherche les points de $S^2$ où $Df = (2x, 2y, 2z)$ et $D\varphi = (2xy, x^2 - z^2 + 1, -2zy)$ sont colinéaires, : $D\varphi = \lambda Df$

On a donc le système

$$2xy = \lambda 2x, \quad (1) \qquad x^2 - z^2 + 1 = 2y\lambda \quad (3)$$
$$-2zy = 2z\lambda, \quad (2) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (4)$$

De (4) il vient $1 - z^2 = x^2 + y^2$. Donc $2y\lambda = 2x^2 + y^2$

a) si $z = \pm 1$, alors $x = y = 0$ convient

| Pts critiques | $(0,0,1)$ | $(0,0,-1)$ |
|---|---|---|
| valeur de $\varphi$ | $0$ | $0$ |

b) si $z \neq \pm 1$ alors $2x^2 + y^2 \neq 0$ et donc $y\lambda \neq 0$

• si $x \neq 0$, alors $(1) \Rightarrow y = \lambda$ ; $(2) \Rightarrow z = 0$

$$\begin{cases} x^2 + 1 = 2y^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad \text{donc } y^2 = \frac{2}{3}, \; x^2 = \frac{1}{3}$$

Ensuite $\varphi(x,y,z) = y\,(x^2 - z^2 + 1) = \frac{4}{3} y$.

| pt critiques sur $S^2$ | $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ | $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ | $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ | $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ |
|---|---|---|---|---|
| valeur $\varphi$ | $\frac{4\sqrt{3}}{9}$ | $-\frac{4}{9}\sqrt{3}$ | $-\frac{4}{9}\sqrt{3}$ | $+\frac{4}{9}\sqrt{3}$ |

• si $x = 0$ alors $2y\lambda = y^2$ ; donc $y = \frac{\lambda}{2}$ ; par 2) $z = 0$

donc $y = \pm 1$ ; on obtient deux autres points critiques.

| pt critiques | $(0,1,0)$ | $(0,-1,0)$ |
|---|---|---|
| Valeurs | $-1$ | $1$ |

Nous pouvons maintenant chercher le maximum : il suffit de le chercher parmi les pts critiques. Comme $\frac{4\sqrt{3}}{9} \approx 0,77\ldots < 1$

le maximum est atteint en $(0,-1,0)$ ; le minimum en $(0,1,0)$