
**CINQUANTE-SIX EXERCICES DE CALCUL DIFFÉRENTIEL
POUR LA TROISIÈME ANNÉE DE LICENCE**

2012–2013

Michèle Audin

1. Espaces vectoriels normés

Exercice 1.1 (Manhattan). Une ville est quadrillée par une famille de rues rectilignes numérotées et une famille orthogonale d'avenues rectilignes numérotées. Montrer que, dans des coordonnées (x, y) associées à des axes parallèles à ces directions, la distance à parcourir pour aller du point de coordonnées (a, b) (sur la a -ième rue et la b -ième avenue) au point de coordonnées (a', b') est

$$|a - a'| + |b - b'|.$$

Dans \mathbf{R}^2 , on considère

$$\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|.$$

Montrer que c'est une norme. Dessiner sa boule unité.

Exercice 1.2 (Les parallélogrammes sont des boules). On considère un parallélogramme (non aplati) de \mathbf{R}^2 centré à l'origine. Montrer qu'il existe une norme sur \mathbf{R}^2 dont ce parallélogramme est la boule unité.

Exercice 1.3 (Norme et convexité). Montrer qu'on peut, dans la définition d'une norme sur l'espace vectoriel E , remplacer la troisième propriété (inégalité triangulaire) par la suivante :

$$\{x \in E \mid \|x\| \leq 1\} \text{ est convexe.}$$

Exercice 1.4 (Les normes $\|\cdot\|_p$). Soit $p > 0$. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, on pose

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad \|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

(1) On suppose d'abord que $n = 2$. Dessiner l'ensemble

$$\overline{B}_p = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid \|x\|_p \leq 1\}$$

dans chacun des cas où $p = 1/2, 1, 3/2, 2, 3, \infty$.

(2) Montrer que, si $p \leq q$, $\overline{B}_p \subset \overline{B}_q$.

(3) La boule $\overline{B}_{1/2}$ dans \mathbf{R}^2 est-elle convexe? Montrer que, plus généralement, $\|\cdot\|_p$ n'est pas une norme sur \mathbf{R}^n quand $p < 1$.

(4) On fixe $x \in \mathbf{R}^n$. Montrer que $\|x\|_p$ tend vers $\|x\|_\infty$ quand p tend vers l'infini (ce qui justifie la notation).

(5) On suppose maintenant que $p \geq 1$. Montrer que $x_i \mapsto x_i^p$ est une fonction convexe sur $]0, +\infty[$, puis que $x \mapsto \|x\|_p^p$ est une fonction convexe sur \mathbf{R}^n . Montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur \mathbf{R}^n .

Exercice 1.5 (Inégalités de Young et de Hölder). On considère un nombre réel $p > 1$ et le nombre réel q défini par

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

(1) Montrer que l'on a, pour tous $a, b \in \mathbf{R}$:

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}$$

(c'est l'inégalité de Young).

(2) En déduire que l'on a, pour tous réels $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$:

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q \right)^{1/q}$$

(inégalité de Hölder).

(3) Montrer (à nouveau) que $\|\cdot\|_p$ satisfait à l'inégalité triangulaire.

Exercice 1.6 (Retour sur l'équivalence des normes). Il est démontré dans le cours que toutes les normes sur \mathbf{R}^n sont équivalentes. C'est le cas en particulier des normes $\|\cdot\|_p$ considérées dans l'exercice 1.4, qui sont équivalentes entre elles, ce qui veut dire que, pour tous $p, q \in [1, +\infty]$, il existe une constante positive $C(p, q)$ telle que

$$\text{pour tout } x \in \mathbf{R}^n, \quad \|x\|_q \leq C(p, q) \|x\|_p.$$

Le but de cet exercice est de déterminer la plus petite constante $C_{p,q}$ vérifiant cette inégalité.

- (1) Dessiner la boule⁽¹⁾ $\overline{B}_\infty(0, 1)$ (dans \mathbf{R}^2), ainsi, sur la même figure, que la plus petite (resp. la plus grande) boule $\overline{B}_p(0, r)$ la contenant (resp. qu'elle contient).
- (2) Montrer que $C_{p,\infty} = 1$ et $C_{\infty,p} = n^{1/p}$ pour $1 \leq p \leq \infty$.
- (3) Montrer que $C_{p,q} = 1$ pour $p \leq q$.
- (4) Montrer que

$$C_{p,q} = n^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \quad \text{pour } p \geq q.$$

Exercice 1.7. (1) Montrer que la formule

$$N(x) = \sup_{t \in \mathbf{R}} \left| \frac{x_1 + tx_2}{1 + t^2} \right|$$

définit bien une application $N : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ et que c'est une norme sur \mathbf{R}^2 .

- (2) Montrer que $N(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + |x_1|)$.
- (3) Dessiner la boule unité de la norme N .
- (4) Comparer la norme N à la norme euclidienne de \mathbf{R}^2 .

Exercice 1.8 (Norme d'une matrice). On définit, sur l'espace $M_n(\mathbf{R})$ des matrices carrées $n \times n$ à coefficients réels,

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_\infty \leq 1} \|Ax\|_\infty.$$

- (1) Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $M_n(\mathbf{R})$.
- (2) Les coefficients d'une matrice A sont notés $a_{i,j}$. Montrer que

$$\|A\| = \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.$$

Exercice 1.9 (En dimension infinie, suites). On fixe un $p \geq 1$. Soit E l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de nombres réels telles que

$$\text{la série } \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p \text{ est convergente.}$$

⁽¹⁾Par $\overline{B}_p(x, r)$, on désigne la boule fermée de centre x et de rayon r pour la norme $\|\cdot\|_p$.

- (1) Montrer que E , avec l'addition des suites et leur multiplication par les nombres réels, est un espace vectoriel.
 (2) Pour $x \in E$, on pose

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}.$$

Montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur E .

Exercice 1.10 (En dimension infinie, fonctions continues). Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbf{R} . Pour $f \in E$, on pose :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt, \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|.$$

- (1) Montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur E .
 (2) Montrer que

$$\text{pour tout } f \in E, \text{ on a } \|f\|_1 \leq \|f\|_\infty.$$

- (3) Montrer que ces deux normes ne sont pourtant pas équivalentes.

Exercice 1.11. Soit E l'espace vectoriel des suites réelles $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ nulles à partir d'un certain rang, c'est-à-dire telles qu'il existe un entier ℓ (qui dépend de la suite considérée) tel que tous les x_p avec $p > \ell$ sont nuls. Pour $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in E$, on pose

$$\|x\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|.$$

- (1) Montrer que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur E .
 (2) Montrer que l'espace vectoriel normé E n'est pas complet.

2. Applications linéaires continues

Exercice 2.1. On note $x \cdot y$ le produit scalaire des vecteurs x et y de \mathbf{R}^n . On fixe un vecteur $a \in \mathbf{R}^n$ et on considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^n &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto a \cdot x \end{aligned}$$

- (1) Montrer que f est linéaire et continue.
 (2) Calculer la norme de f quand \mathbf{R}^n est muni de la norme $\|\cdot\|_p$ (avec $1 \leq p \leq \infty$) (\mathbf{R} est muni de la valeur absolue).

Exercice 2.2. On considère l'espace vectoriel E des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbf{R} . On le munit de la norme $\|\cdot\|_1$ (comme définie dans l'exercice 1.10). On considère l'application $P : E \rightarrow E$ qui, à toute fonction continue f associe sa primitive qui s'annule en 0. Montrer que P est un endomorphisme continu et calculer sa norme.

Exercice 2.3. Soient E, F et G trois espaces vectoriels normés. On munit $E \times F$ de la norme

$$\|(x, y)\| = \sup(\|x\|, \|y\|).$$

Soit $B : E \times F \rightarrow G$ une application bilinéaire.

- (1) Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :
 (a) L'application B est continue.
 (b) L'application B est continue en $(0, 0)$.
 (c) Il existe une constante $M \geq 0$ telle que

$$\text{pour tous } (x, y) \in E \times F, \quad \|B(x, y)\| \leq M \|x\| \|y\|.$$

- (2) On suppose que E et F sont de dimension finie. Montrer que toutes les applications bilinéaires sont continues.

- (3) Dans le cas général, on appelle $\mathcal{L}_2(E \times F, G)$ l'ensemble des applications bilinéaires continues de $E \times F$ dans G . Montrer que c'est un espace vectoriel, que

$$\|B\| = \sup_{\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1} \|B(x, y)\|$$

est une norme sur cet espace, et qu'on a

$$\text{pour tout } (x, y) \in E \times F, \quad \|B(x, y)\| \leq \|B\| \|x\| \|y\|.$$

3. Différentiabilité

Exercice 3.1. On suppose que $(x, y) \mapsto f(x, y)$ est différentiable (de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R}). Dériver la fonction $u(x) = f(x, -x)$ et calculer la différentielle de l'application $g(x, y) = f(y, x)$.

Exercice 3.2. Écrire la différentielle d'une application constante, d'une application linéaire, d'une application quadratique sur \mathbf{R}^n .

Exercice 3.3. Soit U un ouvert d'un espace vectoriel normé E , soit F un espace vectoriel normé, et soit $f : E \rightarrow F$ une application différentiable. On fixe $a \in U$ et $v \in E$. On demande de calculer la dérivée de

$$t \longmapsto f(a + tv)$$

en $t = 0$.

Exercice 3.4. On reprend les notations de l'exercice 2.3. On suppose que E, F et G sont de dimension finie. Montrer que toute application bilinéaire est différentiable et calculer sa différentielle.

Exercice 3.5. Soient $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ et $g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ deux applications différentiables. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} h : \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(x + g(x, y)) \end{aligned}$$

est différentiable et calculer sa différentielle en chaque point.

Exercice 3.6. Soit E l'espace des matrices carrées $n \times n$. On fixe une matrice $M \in E$. On considère l'application

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow E \\ A &\longmapsto AMA. \end{aligned}$$

Montrer qu'elle est différentiable en tout point et calculer sa différentielle.

Exercice 3.7. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. L'espace $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E est muni de la norme

$$\|L\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|L(x)\|.$$

Soit k un entier ≥ 1 . Montrer que l'application $L \mapsto L^k$ (de $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même) est différentiable et calculer sa différentielle.

Exercice 3.8. Soient $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ et $g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ deux applications différentiables. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} h : \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(xy^2g(x, y)) \end{aligned}$$

est différentiable et calculer sa différentielle en chaque point.

Exercice 3.9. On considère deux applications différentiables

$$\begin{aligned} g : \mathbf{R}^3 &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (g_1(x, y, z), g_2(x, y, z)) \end{aligned}$$

et $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} h : \mathbf{R}^3 &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (f(g_1(x, y, z)g_2(x, y, z)), g_1(x, y, z) + f(g_2(x, y, z))) \end{aligned}$$

est différentiable et calculer sa différentielle en chaque point.

Exercice 3.10. On considère l'application $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer ses dérivées partielles. Sont-elles continues? L'application f est-elle différentiable en $(0, 0)$?
Mêmes questions avec l'application $g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 3.11 (Différentielle de l'inverse). L'espace $M_n(\mathbf{R})$ des matrices $n \times n$ réelles est muni d'une norme « opératorielle⁽²⁾ ». On appelle Id la matrice identité.

(1) Montrer que, si $\|H\| < 1$, la matrice $\text{Id} - H$ est inversible, et qu'on a :

$$(\text{Id} - H)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} H^k.$$

(2) Montrer que, pour toute matrice inversible A , le groupe $\text{GL}(n; \mathbf{R})$ des matrices inversibles contient une boule ouverte centrée en A , et en déduire que c'est un ouvert de $M_n(\mathbf{R})$.

(3) Montrer que l'application $f : \text{GL}(n; \mathbf{R}) \rightarrow \text{GL}(n; \mathbf{R})$ définie par $f(A) = A^{-1}$ est différentiable en Id et calculer sa différentielle.

(4) Montrer qu'elle est différentiable en A pour tout A et calculer sa différentielle.

Exercice 3.12. On considère les applications f et g définies par

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R}^3 & g : \mathbf{R}^3 &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x^2 y, xy, xy^3) & (x, y, z) &\longmapsto (x + y + z, xyz) \end{aligned}$$

Calculer

- la matrice jacobienne de f en a ,
- la matrice jacobienne de g en $f(a)$,
- la matrice jacobienne de $g \circ f$ en a .

Exercice 3.13 (Applications homogènes). Soient E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie, soit α un nombre réel, et soit U un ouvert de E tel que

$$x \in U \text{ et } t > 0 \Rightarrow tx \in U.$$

On dit qu'une application différentiable $f : U \rightarrow F$ est homogène de degré α si

$$\forall x \in U, \quad \forall t > 0, \quad f(tx) = t^\alpha f(x).$$

On dit qu'elle vérifie l'identité d'Euler si

$$\forall x \in U, \quad (df)_x(x) = \alpha f(x).$$

⁽²⁾C'est-à-dire, une norme $\|\cdot\|$ étant fixée sur \mathbf{R}^n ,

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Elle vérifie donc $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

On montre dans la suite que ces deux propriétés sont équivalentes.

(1) On suppose que f est homogène de degré α .

(a) Soit x un point de U . On définit

$$\begin{aligned}\varphi :]0, +\infty[&\longrightarrow F \\ t &\longmapsto f(tx).\end{aligned}$$

Montrer que φ est différentiable sur $]0, +\infty[$ et calculer $\varphi'(t)$ (pour tout t).

(b) Montrer que f vérifie l'identité d'Euler.

(2) On suppose, réciproquement, que f vérifie l'identité d'Euler.

(a) Soit x un point de U . On définit

$$\begin{aligned}\psi :]0, +\infty[&\longrightarrow F \\ t &\longmapsto \frac{1}{t^\alpha} f(tx).\end{aligned}$$

Montrer que ψ est différentiable sur $]0, +\infty[$ et calculer $\psi'(t)$ (pour tout t).

(b) Montrer que f est homogène de degré α .

Exercice 3.14. Soit f l'application définie sur $\mathbf{R}^2 - \{0\}$ par

$$f(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

Déterminer $f \circ f$ et montrer que f est un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^1 de $\mathbf{R}^2 - \{0\}$ dans lui-même.

Exercice 3.15. On munit \mathbf{R}^2 de la norme euclidienne et l'espace des matrices carrées 2×2 de la norme habituelle (comme dans l'exercice 1.8). On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbf{R}.$$

Montrer que $\|A\| = \sqrt{a^2 + b^2}$. On considère l'application f de l'exercice 3.14. Calculer la matrice jacobienne de f et montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2 - \{0\}$, on a

$$\left\| (df)_{(x,y)} \right\| = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Montrer que l'application linéaire $(df)_{(x,y)}$ conserve les angles dans \mathbf{R}^2 .

Exercice 3.16. Soient U un ouvert connexe d'un espace vectoriel normé E de dimension finie, F un autre espace vectoriel normé de dimension finie, et $f : U \rightarrow F$ une application différentiable en tout point de U . Montrer que f est lipschitzienne si et seulement si l'application $x \mapsto (df)_x$ est bornée sur U .

Exercice 3.17. Soient E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie, et soit U un ouvert connexe de E . Soient $L : E \rightarrow F$ une application linéaire et $f : E \rightarrow F$ une application différentiable sur E telle que

$$\forall x \in U, \quad (df)_x = L.$$

Que peut-on dire de f ?

Exercice 3.18 (Différentielle du déterminant). On considère l'espace vectoriel $M_n(\mathbf{R})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et l'application

$$\begin{aligned}f : M_n(\mathbf{R}) &\longrightarrow \mathbf{R} \\ A &\longmapsto \det A.\end{aligned}$$

On note Id la matrice identité et, pour tous i et j , $M_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé sur la i -ème ligne et la j -ème colonne, qui vaut 1.

- (1) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 .
- (2) Calculer $(df)_{\text{Id}}(M_{i,j})$ (pour tous i et j).
- (3) Montrer que $(df)_{\text{Id}}(H) = \text{tr}(H)$ pour tout $H \in M_n(\mathbf{R})$.

Exercice 3.19 (Lois de groupe sur \mathbf{R}). Soit \star une loi de groupe sur \mathbf{R} dont on appelle l'élément neutre e . On suppose que l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) &\longmapsto x \star y \end{aligned}$$

est de classe \mathcal{C}^1 . On appelle $\partial_1 f$, $\partial_2 f$ ses deux dérivées partielles.

- (1) Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbf{R}$, on a

$$(\partial_2 f)_{(x \star y, e)} = (\partial_2 f)_{(x, y)} \cdot (\partial_2 f)_{(y, e)}.$$

En déduire que $(\partial_2 f)_{(y, e)} > 0$.

- (2) On cherche à construire une fonction $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, de classe \mathcal{C}^1 , telle que

$$\forall x, y \in \mathbf{R}, \quad \varphi(x \star y) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

En dérivant cette relation par rapport à y , montrer qu'alors la fonction φ doit vérifier

$$\varphi(x) = a \int_e^x \frac{dt}{(\partial_2 f)_{(t, e)}}$$

pour une certaine constante a .

- (3) Réciproquement, montrer que, pour toute constante $a \neq 0$, l'égalité précédente définit un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^1 de \mathbf{R} dans \mathbf{R} , qui transforme la loi \star en l'addition.
 (4) En particulier, la loi \star est nécessairement commutative. Montrer que ce n'est pas le cas sur \mathbf{R}^2 , en considérant la loi

$$(x_1, x_2) \star (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + e^{x_1} y_2).$$

Exercice 3.20 (Différentielle de l'inverse, en dimension infinie). Soient E et F deux espaces de Banach. On appelle $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F . On dit que $f : E \rightarrow F$ est un isomorphisme de E dans F si f est bijective et si son inverse $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$. On appelle $\text{Isom}(E, F)$ l'ensemble des isomorphismes de E dans F .

- (1) Soient $h_1 \in \mathcal{L}(E, F)$ et $h_2 \in \mathcal{L}(F, E)$. Montrer que

$$\|h_2 \circ h_1\| \leq \|h_1\| \|h_2\|.$$

- (2) Soit $g \in \mathcal{L}(E, E)$. On note $g^0 = \text{Id}$, $g^1 = g$, $g^n = g \circ g^{n-1}$ pour $n \geq 2$. On suppose que $\|g\| < 1$.

(a) Montrer que la série de terme général g^n converge absolument.

(b) Soit $m \in \mathbf{N}$. Calculer $(\text{Id} - g) \left(\sum_{n=0}^m g^n \right)$ et $\left(\sum_{n=0}^m g^n \right) (\text{Id} - g)$.

(c) Montrer que $\text{Id} - g \in \text{Isom}(E, E)$.

- (3) Soit $f \in \text{Isom}(E, F)$. Soit $h \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que

$$\|h\| < \frac{1}{\|f^{-1}\|} \Rightarrow f + h \in \text{Isom}(E, F).$$

En déduire que $\text{Isom}(E, F)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E, F)$.

- (4) On considère maintenant l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \text{Isom}(E, F) &\longrightarrow \text{Isom}(F, E) \\ f &\longmapsto f^{-1} \end{aligned}$$

(a) Montrer que φ est différentiable et calculer $(d\varphi)_f$ pour tout $f \in \text{Isom}(E, F)$.

(b) Montrer que φ est de classe \mathcal{C}^1 .

4. Inégalité des accroissements finis

Exercice 4.1. Montrer que le système d'équations

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \sin(x + y) \\ y = \frac{1}{2} \cos(x - y) \end{cases}$$

admet au plus une solution⁽³⁾.

Exercice 4.2 (Nombres algébriques, nombres de Liouville). On dit que $x \in \mathbf{R}$ est algébrique de degré au plus n s'il est racine d'une équation polynomiale de degré n à coefficients entiers

$$a_n x^n + \dots + a_0 = 0, \quad a_i \in \mathbf{Z}, n \geq 1.$$

On dit que x est transcendant s'il n'est pas algébrique (pour aucun degré).

- (1) Montrer que $\sqrt{2}$ est algébrique de degré au plus 2.
- (2) On suppose que x est algébrique de degré au plus n . En appliquant l'inégalité des accroissements finis à un polynôme dont x est racine, montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\text{pour tous entiers } p \in \mathbf{Z}, q \geq 1, \quad \left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{q^n}.$$

- (3) On considère le nombre réel α dont le développement décimal comporte des 1 pour les $k!$ -ièmes chiffres après la virgule, des zéros sinon :

$$\alpha = 1,11000100000000000000000010 \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{10^{k!}}.$$

Montrer que α est transcendant.

5. Autour du théorème d'inversion locale

Exercice 5.1. On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (e^x \cos y, e^x \sin y). \end{aligned}$$

Montrer que f vérifie les hypothèses du théorème d'inversion locale en tout point de $\mathbf{R}^2 - \{0\}$ et qu'elle n'est ni injective, ni surjective.

Exercice 5.2. Soit f une application différentiable de \mathbf{R}^n dans lui-même. On suppose que 0 est un point fixe de f et que 1 n'est pas valeur propre de l'application linéaire $(df)_0$. Montrer que 0 est un point fixe isolé⁽⁴⁾.

Exercice 5.3. On reprend les notations et les hypothèses de l'exercice 5.2. Soit $g : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ une application de classe \mathcal{C}^1 . Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on définit

$$\begin{aligned} f_\lambda : \mathbf{R}^n &\longrightarrow \mathbf{R}^n \\ x &\longmapsto f(x) + \lambda g(x). \end{aligned}$$

Montrer qu'il existe

- un réel $\varepsilon > 0$,
- un voisinage V de 0 dans \mathbf{R}^n ,
- une application $\varpi :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow V$ de classe \mathcal{C}^1

tels que, pour tout $\lambda \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\varpi(\lambda)$ est l'unique point fixe de f_λ dans V .

⁽³⁾Indication : on pourra majorer la norme de la différentielle de $f(x, y) = (\frac{1}{2} \sin(x + y), \frac{1}{2} \cos(x - y))$.

⁽⁴⁾Indication : on pourra considérer l'application $x \mapsto f(x) - x$.

Exercice 5.4. Pour tout $a = (a_0, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$, on définit

$$P_a \in \mathbf{R}[X] \text{ par } P_a(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n.$$

Soit $b \in \mathbf{R}^{n+1}$. On suppose que $x_b \in \mathbf{R}$ est une racine simple du polynôme P_b . Montrer qu'il existe

- un voisinage ouvert U de b dans \mathbf{R}^{n+1} ,
- un voisinage ouvert de x_b dans \mathbf{R}

tels que

$$\forall a \in U, \quad P_a \text{ a une unique racine dans } V.$$

Exercice 5.5. On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (2x - y + x^2y - 2y^5, x + 3y - 4x^2y^2). \end{aligned}$$

Montrer qu'il existe des voisinages U et V de $(0, 0)$ dans \mathbf{R}^2 tels que f induit un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^1 de U dans V . L'application f est-elle un difféomorphisme de \mathbf{R}^2 sur son image ?

Exercice 5.6. Montrer que l'équation

$$\cos(x + y) = 1 + x + 2y$$

définit implicitement au voisinage de $(0, 0)$ une fonction φ de classe \mathcal{C}^1 telle que

$$\cos(x + \varphi(x)) = 1 + x + 2\varphi(x).$$

Calculer $\varphi'(0)$.

Exercice 5.7. On considère le système de deux équations à trois inconnues

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ x^3 - y^3 + z^3 = 1 \end{cases}$$

dont on cherche les solutions dans \mathbf{R}^3 .

- (1) Vérifier que le point $(2, -1, -2)$ est une solution.
- (2) Montrer qu'il existe deux fonctions φ et $\psi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, toutes deux définies et de classe \mathcal{C}^1 sur un voisinage de -2 et telles que, pour tout z dans ce voisinage, $(\varphi(z), \psi(z), z)$ est solution du système.
- (3) Calculer $\varphi'(z)$ et $\psi'(z)$.

Exercice 5.8. On considère le système de trois équations à quatre inconnues

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2 \\ x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 0 \end{cases}$$

dont on cherche les solutions dans \mathbf{R}^4 .

- (1) Vérifier que $(0, -1, 1, 0)$ est une solution.
- (2) Donner un énoncé précis du fait que, au voisinage de ce point, les solutions sont de la forme $(x(t), y(t), z(t), t)$.
- (3) Quelle est alors la dérivée en 0 de l'application

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ t &\longmapsto (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

Exercice 5.9. On considère l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto \left(\sin\left(\frac{y}{2}\right) - x, \sin\left(\frac{x}{2}\right) - y \right) \end{aligned}$$

- (1) Montrer que φ est de classe \mathcal{C}^∞ .
- (2) Calculer la jacobienne de φ et montrer que $(d\varphi)_{(x,y)}$ est inversible pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

- (3) En déduire que φ est un difféomorphisme local de classe \mathcal{C}^∞ de \mathbf{R}^2 sur son image et que cette image est ouverte.
 (4) Montrer que, pour tous u_1 et u_2 avec $u_1 < u_2$, il existe $u \in]u_1, u_2[$ tel que

$$\sin\left(\frac{u_2}{2}\right) - \sin\left(\frac{u_1}{2}\right) = \frac{1}{2}(u_2 - u_1) \cos\left(\frac{u}{2}\right).$$

En déduire que φ est injective.

- (5) Soient $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ deux suites. On suppose que la suite $(\varphi(x_n, y_n))_{n \in \mathbf{N}}$ est convergente. Montrer qu'alors $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sont bornées. En déduire que $\varphi(\mathbf{R}^2)$ est fermé...
 (6) ... et que φ est un difféomorphisme de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R}^2 .
 (7) Soit $(u, v) = \varphi(x, y)$. Calculer $(d\varphi^{-1})_{(u,v)}$ en fonction de $(d\varphi)_{(x,y)}$. Montrer que $(d\varphi^{-1})$ est bornée, puis que φ^{-1} est lipschitzienne.

6. Dérivée seconde, extrema

Exercice 6.1. On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) &\longmapsto x^3 y^2 \end{aligned}$$

et le point $a = (1, 2) \in \mathbf{R}^2$. Calculer $(df)_a(h)$ et $(d^2f)_a(h, k)$, pour tous $(h, k) \in \mathbf{R}^2$. En déduire le développement limité à l'ordre 2 de f en a .

Exercice 6.2. Une application $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ de classe \mathcal{C}^2 est telle que

$$f(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1.$$

Montrer que l'application $g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x, y) - xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est continue.

Exercice 6.3. Soit $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$, définie par $f(x, y, z) = x^2 y^3 z^5$. On demande la matrice hessienne de f au point $(2, -1, 1)$.

Exercice 6.4. Déterminer les extrema de $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{x^2 - y^2}$ et préciser leur nature. Mêmes questions pour g définie par $g(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$.

Exercice 6.5. Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et $f : E \rightarrow \mathbf{R}$ une application de classe \mathcal{C}^2 et positive. On suppose qu'il existe une constante M telle que $\|(d^2f)_x\| \leq M$ pour tout x . Montrer que

$$\|(df)_x\| \leq \sqrt{2Mf(x)}.$$

Exercice 6.6. Déterminer les points critiques de l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) &\longmapsto x^3 - 3x + xy^2 \end{aligned}$$

et préciser leur nature.

Exercice 6.7. Déterminer les extrema locaux de la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) &\longmapsto x^2 + y^3 - 3y. \end{aligned}$$

Même question pour la fonction

$$g : U \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$(x, y) \longmapsto \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{x+y}$$

(où $U = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \neq 1, y \neq 1, x \neq -y\}$).

Exercice 6.8 (Diagonalisation des matrices symétriques réelles dans une base orthonormée)

On se place dans \mathbf{R}^n , muni de la norme euclidienne notée $\|\cdot\|$ et du produit scalaire noté \cdot , on appelle S la sphère unité

$$S = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| = 1\}.$$

Soit A une matrice symétrique réelle.

(1) Montrer que

$$f : \mathbf{R}^n - \{0\} \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$x \longmapsto \frac{Ax \cdot x}{\|x\|^2}$$

est continue et que sa restriction à S admet un maximum sur S . Soit e_1 un vecteur unitaire en lequel ce maximum est atteint.

(2) Montrer que e_1 est un maximum pour f sur $\mathbf{R}^n - \{0\}$.

(3) Calculer la différentielle de f et montrer que

$$(df)_{e_1}(x) = 2(Ae_1) \cdot x - 2((Ae_1) \cdot e_1)(e_1 \cdot x) \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}^n.$$

(4) En déduire que, pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, l'égalité $e_1 \cdot x = 0$ implique l'égalité $(Ae_1) \cdot x = 0$.

(5) Montrer qu'il existe une base orthonormée de \mathbf{R}^n dans laquelle la matrice A est diagonalisable.

Exercice 6.9. Déterminer les points critiques et la nature des points critiques de la fonction

$$f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$(x, y, z) \longmapsto 2x^2 + 4xy - 6xz + y^4 - 2y^3 + 3y^2 - 6yz + 5z^2.$$

Exercice 6.10. Déterminer les extrema de la fonction $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i \ln x_i$ sur $\{x \in \mathbf{R}^n \mid x_i > 0 \text{ et } \sum x_i = a\}$

(pour $a > 0$).

Exercice 6.11. Les réels positifs $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ vérifient $\alpha_1 \cdots \alpha_n = 1$. Déterminer le maximum de la fonction

$$f(x) = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \text{ sur } K = \left\{x \in \mathbf{R}^n \mid x_i \geq 0 \text{ et } \sum \alpha_i x_i = 1\right\}.$$

En déduire que

$$x_1, \dots, x_n \geq 0 \Rightarrow \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i.$$

7. Exercices supplémentaires

Exercice 7.1 (Sur le théorème d'inversion locale). On considère la fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin \frac{\pi}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable sur \mathbf{R} , que $f'(0) \neq 0$ et que (pourtant) f n'est injective sur aucun voisinage de 0. Est-ce contradictoire avec le théorème d'inversion locale ?

Exercice 7.2 (Sur les dérivées d'ordre supérieur). On considère, pour une application $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ de classe \mathcal{C}^2 , les deux propriétés suivantes, dont on va montrer qu'elles sont équivalentes.

- (1) $\forall x, h \in \mathbf{R}^n, \|f(x+h) - f(x)\| = \|h\|.$
 (2) $\forall x, h \in \mathbf{R}^n, \|(df)_x(h)\| = \|h\|.$

Montrer que (1) \Rightarrow (2). Pour montrer la réciproque, on suppose que (2) est vraie. Que peut-on dire de la matrice jacobienne de f ? On pose

$$a_{ijk} = \sum_{m=1}^n \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \frac{\partial^2 f_m}{\partial x_j \partial x_k}.$$

Montrer que $a_{ijk} = a_{ikj}$, puis que $a_{ijk} = -a_{kji}$. En déduire que pour tous i, j et k , $a_{ijk} = 0$, puis que la matrice jacobienne de f est constante, enfin que f satisfait a (1).

Exercice 7.3 (Sur la formule de Taylor). Écrire la formule de Taylor à l'ordre 2 pour une fonction de trois variables.

Exercice 7.4 (Sur la formule de Taylor). Écrire la formule de Taylor en $(0, 0)$ à l'ordre 2, puis à l'ordre 5, puis à l'ordre 13 pour la fonction

$$f(x, y) = y^5 + x^3y - x^2 + y.$$

Références

- [1] F. ROUVIÈRE – *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, Cassini Paris, 2003, Deuxième édition revue et augmentée.