Université de Nice - Sophia Antipolis **2013/2014**
L3MA - Calcul Différentiel **Semestre 1**

Feuille d'exercices n° 1

E.Aubry

Dans toute la feuille, E est un K-espace vectoriel (avec K égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Une **distance** sur un ensemble X est une application $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ vérifiant les conditions suivantes.

1. $d(x, y) = d(y, x)$ quels que soient x, y dans X (symétrie),
2. $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$ (séparation),
3. $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ quels que soient x, y, z dans X (inégalité triangulaire).

Une **norme** sur E est une application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant les conditions suivantes.

1. $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$,
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ quels que soient x dans E et λ dans K,
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ quels que soient x, y dans E (inégalité triangulaire).

$(E, \|\cdot\|)$ est alors appelé espace vectoriel normé (noté evn).

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn. Pour tout $x \in E$ et tout $r > 0$, on note $B_x(r) = \{y \in E / \|x - y\| < r\}$ la **boule ouverte** centrée en x et de rayon r, $B'_x(r) = \{y \in E / \|x - y\| \leqslant r\}$ la **boule fermée** centrée en x et de rayon r et $S_x(r) = \{y \in E / \|x - y\| = r\}$ la **sphère** centrée en x et de rayon r. Une partie $A \subset E$ est dite **convexe** ssi pour tout $(x, y) \in A^2$, on a $[x, y] \subset A$, où $[x, y] = \{tx + (1 - t)y = y + t(x - y),\ t \in [0, 1]\}$.

Exercice 1. (Quelques normes classiques)

1. Montrer que les applications suivantes
$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} |x_i|^2}, \qquad \|x\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$$
définissent des normes sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ et qu'on a $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_2 \leqslant n\|x\|_\infty$.
2. Montrer que $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,dt$, $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,dt}$ et $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$ sont trois normes sur $E = \mathcal{C}^0([a, b], K)$.
3. Soit E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle x, y\rangle$ (i.e. une forme bilinéaire symétrique telle que $\langle x, x\rangle > 0$ pour tout $x \neq 0$). Montrer que $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ est une norme sur E.

Exercice 2. Dessiner dans $\mathbb{R}^2$ les boules et les sphères centrées en $(1, 2)$ et de rayon 2 pour les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 3. Montrer que si $\|\cdot\|$ est une norme sur E alors $d(x, y) = \|x - y\|$ est une distance sur E qui est invariante par translation (i.e. $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ pour tout $x, y, z \in E$) et homogène (i.e. $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|d(x, y)$ pour tout $x, y \in E$).

Réciproquement, montrer que si d est une distance sur E invariante par translation et homogène, alors $\|x\| := d(0, x)$ définit une norme sur E.

Exercice 4. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn. Montrer que les applications suivantes sont continues.

$$\begin{array}{rcl} s : E \times E & \to & E \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} m : E \times K & \to & E \\ (x, \lambda) & \mapsto & \lambda x \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} n : E & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \|x\| \end{array}$$

Exercice 5. Montrer que $B_x(r)$ et $B'_x(r)$ sont des ensembles convexes. $S_x(r)$ est-il convexe ?

Exercice 6. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn, $a, b \in E$, $\lambda \in K$ et $r > 0$. On pose $L_{b,\lambda}(x) = b + \lambda x$. Montrer que $L_{b,\lambda}\big(B_a(r)\big) = B_{L_{b,\lambda}(a)}(|\lambda| r)$ et $L_{b,\lambda}\big(B'_a(r)\big) = B'_{L_{b,\lambda}(a)}(|\lambda| r)$.

Exercice 7. Soit E un evn, $a, b \in E$ et $r, r' > 0$. Montrer que $r + r' \leqslant \|a - b\|$ ssi $B_a(r) \cap B_b(r') = \emptyset$. Montrer que $\|a - b\| + r \leqslant r'$ ssi $B_a(r) \subset B_b(r')$. Qu'en est-il pour les boules fermées ?

Exercice 8. Soit E un evn $\neq \{0\}$. Montrer que deux boules de E sont égales si et seulement si elles ont même rayon, même centre et même type.

Exercice 9. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ deux normes sur E. Montrer que l'application $f(x) = \frac{\|x\|}{\|x\|'} x$ est un homéomorphisme de la boule unité fermée de $\|\cdot\|$ sur la boule unité fermée de $\|\cdot\|'$.

Exercice 10. Soit E un K-espace vectoriel et $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ deux normes sur E. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes.

1. Il existe une constante $C > 0$ telle que $\|x\| \leqslant C\|x\|'$ pour tout $x \in E$.
2. Toute boule de $\|\cdot\|$ contient une boule de $\|\cdot\|'$ de même centre.
3. Tout ouvert de $\|\cdot\|$ est un ouvert de $\|\cdot\|'$.
4. Il existe une boule de $\|\cdot\|$ qui contient une boule de $\|\cdot\|'$.

Exercice 11. Montrer que sur l'espace $C^0([0,1], \mathbb{R})$ les normes $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f(t)|$ et $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt$ ne sont pas équivalentes (considérer la suite $f_n(x) = x^n$). Montrer que la boule unité fermée pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas compacte (on pourra construire une suite de fonctions dont tous les éléments sont à distance 1).

Exercice 12. Soit $X = C^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$.
$A = \{f \,/\, f(0) = 0\}$ est-il ouvert ? fermé ? Déterminer $\overline{A}$.
$B = \{f \,/\, f(0) > 0\}$ est-il ouvert ? fermé ? Déterminer $\overline{B}$.
$C = \{f \,/\, \int_0^1 f(x)\, dx = 0\}$ est-il ouvert ? fermé ? Déterminer $\overline{B}$.

Exercice 13. Soit $X = C^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx$.
La suite (f_n) où $f_n(x) = x^n$ est-elle convergente dans X?
$A = \{f | f(1) = 1\}$ A est-il ouvert ? fermé ?

Exercice 14. Meilleure approximation

1. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$ (i.e. pour tout réel $M > 0$, il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout x de E, $\|x\| \geqslant A$ implique $f(x) \geqslant M$). Montrer que f est minorée sur E et qu'elle atteint son minimum (raisonner sur une boule fermée assez grande).
2. Application : Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Alors tout point de $\mathbb{R}^n$ admet une meilleure approximation dans E (i.e. $\inf_{x \in E} \|x - a\|$ est atteint). A-t-on unicité des points $e \in E$ tels que $\|a - e\| = \inf_{x \in E} \|x - a\|$? (on étudiera les cas des normes $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^2$).

Exercice 15. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn. Montrer que $B_0(1)$ est un ouvert convexe, symétrique (i.e. si $x \in B'_0(1)$ alors $\lambda x \in B'_0(1)$ pour tout $\lambda \in K$ tel que $|\lambda| = 1$), borné et contenant 0.

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et $\Omega \subset E$ un ouvert convexe, symétrique, borné et contenant 0. Montrer que $\|x\| = \inf\{r \in \mathbb{R}_*^+ \,/\, \frac{x}{r} \in \Omega\}$ est une norme sur E telle que $B_0(1) = \Omega$.