Université de Nice - Sophia Antipolis **2012/2013**
L3MA - Calcul Différentiel **Semestre 1**

Feuille d'exercices n° 2

E.Aubry

Exercice 1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn, $a \in E$ et $\lambda \in K$. Montrer que $L_{\lambda,a}(x) = \lambda x + a$ est une application continue sur E.

Exercice 2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E qui converge vers l. Montrer que $\|x_n\|$ tend vers $\|l\|$.

Exercice 3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ et $(E', \|\cdot\|')$ deux evn. On muni $E\times E'$ de la norme produit $\|(x,y)\| = \max(\|x\|, \|y\|')$.

a) Montrer qu'une suite (x_n, y_n) de $E \times E'$ converge vers (l, l') ssi x_n vers l pour la norme $\|\cdot\|$ et y_n vers l' pour la norme $\|\cdot\|'$.

b) Montrer que $\pi_1 : (x,y) \in E \times E' \mapsto x \in E$ et $\pi_2 : (x,y) \in E \times E' \mapsto y \in E'$ sont continues.

c) Dans le cas $(E, \|\cdot\|) = (E', \|\cdot\|')$, montrer que $(x,y) \in E \times E \mapsto x + y \in E$ est continue.

Exercice 4. Soit
$$\begin{array}{rcl} u : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty) & \to & (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \\ (x,y) & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

Déterminer l'image par u de la boule unité. En déduire $\|u\|$.

Exercice 5. Calculer les normes des applications $\begin{array}{rcl} L_a : \big(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2\big) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \langle a, x\rangle \end{array}$ et $\begin{array}{rcl} L'_a : \big(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2\big) & \to & \mathbb{R}^3 \\ x & \mapsto & a \wedge x \end{array}$ (où dans les deux cas a est un vecteur fixe).

Calculer les normes des applications bilinéaires $\begin{array}{rcl} L : \big(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2\big) \times \big(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2\big) & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \langle x, y\rangle \end{array}$ et $\begin{array}{rcl} L' : \big(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2\big) \times \big(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2\big) & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & x \wedge y \end{array}$

Exercice 6. On munit $\mathbb{C}[X]$ de la norme $\|\sum_{i=1}^d a_i X^i\|_\infty = \max_{i\leqslant d} |a_i|$.

a) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ un nombre complexe fixé de module $|\alpha| < 1$. Montrer que l'application $\begin{array}{rcl} L_\alpha : \big(\mathbb{C}[X], \|\cdot\|_\infty\big) & \to & \mathbb{C} \\ P & \mapsto & P(\alpha) \end{array}$ est linéaire continue de norme $\frac{1}{1-|\alpha|}$.

b) Que se passe-t-il si $|\alpha| \geqslant 1$?

c) Montrer que l'application $\begin{array}{rcl} Der_n : \big(\mathbb{C}_n[X], \|\cdot\|_\infty\big) & \to & \big(\mathbb{C}_n[X], \|\cdot\|_\infty\big) \\ P & \mapsto & P' \end{array}$ est linéaire continue. Calculer sa norme. L'application $\begin{array}{rcl} Der : \big(\mathbb{C}[X], \|\cdot\|_\infty\big) & \to & \big(\mathbb{C}[X], \|\cdot\|_\infty\big) \\ P & \mapsto & P' \end{array}$ est-elle continue ?

Exercice 7. Soit $u : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ une application linéaire de matrice (a_{ij}). Calculer $|||u|||$ en fonction de (a_{ij}). Même question en remplaçant $\|\cdot\|_1$ par $\|\cdot\|_\infty$ au départ et à l'arrivée.

Exercice 8. Montrer que si $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et que si $\mathbb{R}^n$ est muni de la norme $\|\cdot\|_2$ au départ et à l'arrivée, alors on a $\|u\|^2 = \max\{\lambda /\ \lambda \text{ est valeur propre de } {}^t u \cdot u\}$.

Exercice 9. montrer que $\|A\| = \sup_{ij} |A_{ij}|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, mais pas une norme d'opérateur.

Exercice 10. Montrer qu'il existe des constantes $C_n, C'_n > 0$ telles que

a) Pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $C_n|P(0)| \leqslant \int_1^2 |P(t)|\,dt$,

b) Pour tout polynôme $P, Q \in \mathbb{C}_n[X]^2$, on a $C_n|P(0)||Q(0)| \leqslant \int_1^2 |P(t)|\,dt \max_{[-2,-1]} |Q|$.

Exercice 11. Soit $u : E \to F$ une application linéaire entre deux *evn*. On suppose que E est de dimension finie et que u est injective. Montrer qu'il existe des réels $m > 0$ et $M > 0$ tels que pour tout point x de E, on ait :

$$m\|x\|_E \leqslant \|u(x)\|_F \leqslant M\|x\|_E.$$

Exercice 12. Notons $I = [0,1]$ et $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ muni de la norme L^∞. Soit $K : I \times I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit l'application $\phi_K : \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ par $\phi_K(f)(t) = \int_0^1 K(t,x)f(x)dx$, où $f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ et $t \in I$. Montrer que ϕ_K est une application linéaire continue.