

**Étude des mouvements de convection
dans une cavité rectangulaire
soumise à un gradient de température horizontal**

*Study on convective motions in a rectangular cavity
with a horizontal gradient of temperature*

par

P. LAURE *

RÉSUMÉ. — On étudie la convection d'un liquide à faible nombre de Prandtl se trouvant dans une cavité rectangulaire différentiellement chauffée. On suppose que le rapport entre la longueur et la hauteur est suffisamment grand pour permettre l'établissement d'un écoulement horizontal au centre de la cavité. On donne la courbe de stabilité neutre de cet écoulement dans le cas où les parois horizontales sont adiabatiques et la paroi supérieure soit rigide soit libre. Puis on calcule les premières solutions bifurquées, en utilisant le système différentiel réduit à la variété centrale. Les résultats numériques permettent de prédire en fonction du nombre de Prandtl, les solutions qui apparaissent. On obtient selon le nombre de Prandtl, dans les cas de parois rigides, soit une convection stationnaire, soit une convection périodique dans le temps en onde plane progressive. Dans le cas d'une frontière supérieure libre, on obtient soit une onde plane progressive, soit une onde plane stationnaire.

ABSTRACT. — This paper discusses the flow of low Prandtl-number liquid contained in a rectangular cavity with differentially heated vertical end walls. We assume that the aspect ratio is large enough to impose a horizontal flow in the core. The marginal stability threshold of this motion is given in two cases, for rigid insulators at both surfaces or for upper stress-free insulator surface. First bifurcated solutions are computed, using the differential system on the center manifold. The numerical results allow us to predict, for specified values of the Prandtl-number, the form of the solution. In the Rigid-Rigid case, we observe either steady horizontal cells or periodic in time travelling waves. In the Rigid-Free case, two forms of periodic in time solutions are obtained, either travelling waves or stationary waves.

1. Introduction

On considère un liquide dans une cavité rectangulaire (fig. 1). Le mouvement convectif est provoqué par les deux parois verticales différentiellement chauffées. Cette étude a pour application directe la croissance de monocristaux à partir d'un bain fondu. En effet

* U.A. n° 168, I.M.S.P., Parc Valrose, 06034 Nice.

si pour une faible différence de températures δT , un simple mouvement unicellulaire est observé, des expériences [1] effectuées dans le cas de liquides à faible nombre de Prandtl ont permis d'observer une oscillation en température dès que l'on dépasse une certaine valeur δT_c . Cette oscillation engendre une striation néfaste du cristal.

Hart [2] et Cormack et Leal [3] ont montré que dans le cas de cavités très longues, on peut calculer (par une méthode asymptotique) une solution analytique ayant un champ de vitesse horizontal au centre de la cavité.

Partant de ces constatations Gill [4] a développé une théorie basée sur une étude de perturbation des équations du mouvement dont les résultats restent assez qualitatifs (il superpose un mouvement oscillatoire dans le plan perpendiculaire à l'écoulement principal de convection entre la paroi chaude et la paroi froide).

Hart a étudié ensuite la stabilité de cet écoulement pour différentes sortes de conditions aux limites. Un grand nombre de travaux relatifs à ce problème sont référencés dans [5].

On se propose d'utiliser une méthode déjà employée pour traiter le problème de Couette-Taylor [6], qui permet l'étude de la stabilité non linéaire au voisinage de l'écoulement stationnaire principal. Il s'agit d'obtenir un système d'équations aux amplitudes qui régit, finalement en dimension réduite, toute la dynamique de l'écoulement.

Nous commençons par rappeler certains résultats de la théorie linéarisée dans les cas où les parois horizontales sont adiabatiques et la paroi supérieure est soit rigide, soit libre. Nous utilisons la théorie récente des bifurcations en présence de symétrie [7], pour calculer les coefficients fondamentaux qui interviennent dans le système aux amplitudes (sur la variété centrale), puis nous donnons la forme des solutions stables obtenues.

2. Position du problème et équivariance

Un fluide visqueux quasi incompressible, obéissant à l'approximation de Boussinesq, est considéré dans une cavité ayant la géométrie de la figure 1, L étant la longueur de la cavité, H sa hauteur, T_0 la température ambiante et δT le gradient de température.

Les équations sont normalisées en utilisant les échelles $g \delta T / A$, $2 g \alpha \delta T H^3 / L v$, $H/2$ et $H^2/4v$ pour la température, la vitesse, la longueur et le temps respectivement. On obtient le système :

$$(2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \text{Gr}(\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}) = -\nabla P + T e_z + \Delta \mathbf{V} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \text{Gr}(\mathbf{V} \cdot \nabla T) = \frac{\Delta T}{\text{Pr}} \\ \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \end{array} \right.$$

où e_z est le vecteur unitaire selon la verticale ascendante,

Gr est le nombre de Grashof $= g \alpha \delta T H^4 / L v^2$,

Pr est le nombre de Prandtl $= \nu / \chi$,

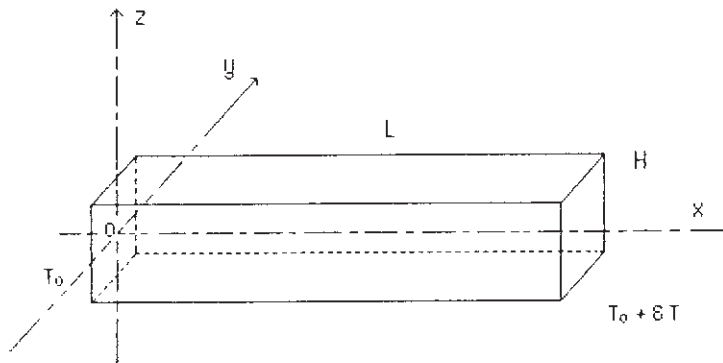


Fig. 1

Fig. 1

A est le rapport d'aspect = L/H,

ν est la viscosité cinématique,

α le coefficient de dilatation thermique,

χ la diffusivité thermique,

V la vitesse du fluide, P la pression et T la température.

Le système (2. 1) a lieu dans le domaine

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq x \leq 2A, 0 \leq y \leq L_y, -1 \leq z \leq 1\}.$$

Les conditions aux limites s'écrivent :

dans le cas rigide-rigide adiabatique (R - R)

$$(2.2a) \quad \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial z} = 0 & \text{en } z = -1 \text{ et } +1 \\ V_x = V_y = V_z = 0 & \text{en } z = -1 \text{ et } +1 \end{cases}$$

dans le cas rigide-libre adiabatique (R - L)

$$(2.2b) \quad \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial z} = 0 & \text{en } z = -1 \text{ et } +1 \\ V_x = V_y = V_z = 0 & \text{en } z = -1 \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} = \frac{\partial V_y}{\partial z} = V_z = 0 & \text{en } z = +1 \end{cases}$$

Remarque. — En fait on annule seulement la composante tangentielle de la contrainte en $z = +1$, en imposant une frontière plane. Cette condition couramment admise est évidemment beaucoup plus simple à traiter que des vraies conditions de surface libre.

Le système admet une solution asymptotique au centre de la cavité quand A tend vers ∞ , de la forme :

$$U_0 = (U_0(z), 0, 0) \quad \text{et} \quad T_0(x, z) = cx + f(z).$$

Cas R - R :

$$U_0(z) = (z^3 - z)/96$$

$$T_0(x, z) = x/16 + \text{Gr Pr} (z^5/5 - 2z^3/3 + z)/6144.$$

Cas R - L :

$$U_0(z) = (4z^3 - 3z^2 - 6z + 1)/384$$

$$T_0(x, z) = x/16 + \text{Gr Pr} (z^5 - 5z^4/4 - 5z^3 + 5z^2/2 + 10z + b)/30720$$

la constante b peut être calculée en réintroduisant les conditions aux extrémités ($x=0$ et $x=2A$), mais elle n'est d'aucune utilité par la suite.

Posons maintenant

$$V = U_0 + u, \quad P = P_0 + q \quad \text{et} \quad T = T_0 + \theta$$

alors le système vérifié par (u, q, θ) sur le domaine $\Omega_x = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / -1 \leq z \leq 1\}$ est le suivant :

$$(2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \text{Gr}(U_0 \cdot \nabla u + u \cdot \nabla U_0 + u \cdot \nabla u) = -\nabla q + \theta e_z + \Delta u \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \text{Gr}(U_0 \cdot \nabla \theta + u \cdot \nabla T_0 + u \cdot \nabla \theta) = \frac{\Delta \theta}{\text{Pr}} \\ \nabla \cdot U = 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial z}(x, y, \pm 1) = 0 \\ u_x(x, y, -1) = u_y(x, y, -1) = u_z(x, y, -1) = 0 \\ \text{cas(R - R)} : u_x(x, y, 1) = u_y(x, y, 1) = u_z(x, y, 1) = 0 \\ \text{cas(R - L)} : \frac{\partial u_x}{\partial z}(x, y, 1) = \frac{\partial u_y}{\partial z}(x, y, 1) = \frac{\partial u_z}{\partial z}(x, y, 1) = 0 \end{array} \right.$$

Il est bien connu que les opérateurs intervenant dans les équations de Navier-Stokes sont invariants par la représentation T , du groupe des mouvements rigides (produit du groupe orthogonal par la groupe des translations de \mathbb{R}^3). L'action de ce groupe sur les champs de vecteurs $V(X)$ (vitesse) et les fonctions scalaires $f(X)$ (pression et température) est définie par les relations :

$$(2.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall g \in O(3) \quad T_g V(X) = g V(g^{-1} X), \quad T_g f(X) = f(g^{-1} X) \\ \forall a \in \mathbb{R}^3, \quad T_a V(X) = V(X + a), \quad T_a f(X) = f(X + a). \end{array} \right.$$

Mais la géométrie des conditions aux limites restreint les invariances du système à l'action des sous-groupes suivants :

Les translations $x \rightarrow x+s$ (τ_s) et $y \rightarrow y+s$ (τ'_s), la réflexion à travers le plan XOZ $y \rightarrow -y$ (S). En coordonnées cartésiennes la représentation (2.4) donne :

$$\begin{aligned} [\tau_s(u, q, \theta)](x, y, z) &= (u_x(x+s, y, z), u_y(x+s, y, z), u_z(x+s, y, z), q(x+s, y, z), \theta(x+s, y, z)) \\ [\tau'_s(u, q, \theta)](x, y, z) &= (u_x(x, y+s, z), u_y(x, y+s, z), u_z(x, y+s, z), q(x, y+s, z), \theta(x, y+s, z)) \\ [S(u, q, \theta)](x, y, z) &= (u_x(x, -y, z), -u_y(x, -y, z), u_z(x, -y, z), q(x, -y, z), \theta(x, -y, z)). \end{aligned}$$

De plus dans le cas R-R, les propriétés de parité en z de l'écoulement de base permettent de montrer que le système (2.3) est invariant par l'action de la réflexion à travers l'axe OY $x \rightarrow -x$ et $z \rightarrow -z$. L'automorphisme (S_r) associé à cette réflexion, qui laisse équivariants les opérateurs du système (2.3), s'écrit :

$$[S_r(u, q, \theta)](x, y, z) = (-u_x(-x, y, -z), u_y(-x, y, -z), -u_z(-x, y, -z), q(-x, y, -z), -\theta(-x, y, -z)).$$

L'approximation asymptotique ($A \rightarrow \infty$) ne permet pas de déterminer complètement la température, car la condition de paroi adiabatique se traduit uniquement par une condition sur la dérivé première de θ . On obtiendra donc la température à une constante près en résolvant le système (2.3). On peut aussi dire que le groupe $(\mathbb{R}, +)$ ayant pour représentation linéaire la translation par rapport à la température (τ_{θ_s}) définie par

$$[\tau_{\theta_s}(u, q, \theta)](x, y, z) = (u(x, y, z), q(x, y, z) + sz, \theta(x, y, z) + s),$$

agit sur l'ensemble des solutions du système (2.3). En effet si (u_0, q_0, θ_0) est solution de (2.3), alors $\tau_{\theta_s}(u_0, q_0, \theta_0)$ est solution de (2.3) pour tout $s \in \mathbb{R}$. L'ensemble

$$\Gamma_{(u_0, q_0, \theta_0)} = \{(u, q, \theta) = \tau_{\theta_s}(u_0, q_0, \theta_0), s \in \mathbb{R}\}$$

est appelé orbite de la solution (u_0, q_0, θ_0) .

3. Étude de la stabilité linéaire

L'analyse linéaire classique du problème, telle que l'a effectuée Hart, consiste à déterminer la valeur critique de Gr en fonction de Pr pour laquelle l'écoulement de base perd sa stabilité. Pour cela on cherche les valeurs propres du système obtenu par suppression des termes non linéaires dans (2.3). Les propriétés d'invariance du système conduisent à chercher des solutions sous la forme :

$$(3.1) \quad \begin{cases} u(x, y, z) = \mathbf{u}(z) e^{i(hx + ky) + \lambda t} \\ q(x, y, z) = \mathbf{q}(z) e^{i(hx + ky) + \lambda t} \\ \theta(x, y, z) = \boldsymbol{\theta}(z) e^{i(hx + ky) + \lambda t} \end{cases}$$

On fait donc une analyse de Fourier des vecteurs propres, supposant une périodicité par rapport à x et y (h et k sont les nombres d'onde dans les directions x et y). En remplaçant (u, q, θ) par l'expression (3.1) dans le système linéarisé à partir de (2.3), on obtient un système différentiel de la forme :

$$(3.2) \quad \mathbf{L}_{hk} \mathbf{W} = \lambda \mathbf{W} \quad \text{avec} \quad \mathbf{W} = (\mathbf{u}, \theta)$$

où

$$(3.3) \quad \mathbf{L}_{hk} \mathbf{W} = \begin{bmatrix} (D^2 - (h^2 + k^2) - ih \operatorname{Gr} U_0(z)) \mathbf{u}_x - \operatorname{Gr} D U_0 \mathbf{u}_z - ih \mathbf{q} \\ (D^2 - (h^2 + k^2) - ih \operatorname{Gr} U_0(z)) \mathbf{u}_y & -ik \mathbf{q} \\ (D^2 - (h^2 + k^2) - ih \operatorname{Gr} U_0(z)) \mathbf{u}_z + \theta & -D \mathbf{q} \\ \left(\frac{D^2 - (h^2 + k^2)}{\operatorname{Pr}} - ih \operatorname{Gr} U_0(z) \right) \theta - \frac{\operatorname{Gr}}{16} \mathbf{u}_x & -\operatorname{Gr} D T_0 \mathbf{u}_z \end{bmatrix}$$

avec $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$, \mathbf{q} tel que

$$(3.4) \quad i(h \mathbf{u}_x + k \mathbf{u}_y) + D \mathbf{u}_z = 0$$

et

$$D = \frac{d}{dz}$$

les conditions aux limites étant

$$(3.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_x(-1) = \mathbf{u}_y(-1) = \mathbf{u}_z(-1) = 0 \\ D\theta(\pm 1) = 0 \\ \text{cas (R-R)} : \mathbf{u}_x(+1) = \mathbf{u}_y(+1) = \mathbf{u}_z(+1) = 0 \\ \text{cas (R-L)} : D\mathbf{u}_x(+1) = D\mathbf{u}_y(+1) = \mathbf{u}_z(+1) = 0 \end{array} \right.$$

L'opérateur \mathbf{L}_{hk} dépend des paramètres Pr , Gr . Si on note λ_0 la valeur propre de partie réelle maximale, on peut montrer que si Gr est assez petit (Pr fixé) alors $\operatorname{Re}(\lambda_0) < 0$, et donc l'écoulement de base est stable.

On définit le nombre de Grashof critique de la façon suivante :

$$(3.6) \quad \operatorname{Gr}_c = \inf_{h, k \in \mathbb{R}} \operatorname{Gr}_0(\operatorname{Pr}, h, k)$$

où Gr_0 est la valeur de Gr telle que $\operatorname{Re}(\lambda_0) = 0$, pour des valeurs fixées de Pr , h et k .

Les résultats numériques qui suivent sont détaillés dans les tableaux I.1, I.2 et les figures 2, 3, 4 et 5 pour les valeurs de Gr_c , h , k et λ_0 .

L'équation (3.2) est résolue par une méthode Tau (Galerkin + conditions aux limites), en utilisant les polynômes de Chebychev comme fonctions de base ([9] et [10]) (on a développé chaque composante sur 18 polynômes). On doit finalement résoudre un problème aux valeurs propres de la forme $\mathbf{A}\mathbf{W} = \lambda \mathbf{B}\mathbf{W}$ avec \mathbf{A} et \mathbf{B} matrices complexes, \mathbf{B} étant singulière. La méthode consiste alors à réduire la dimension du problème par une

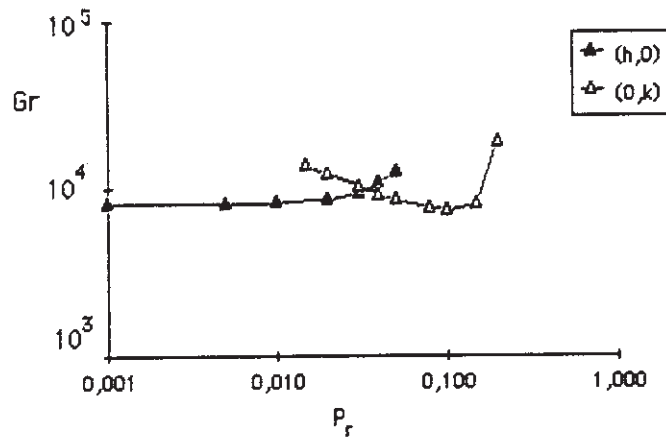


Fig. 2. — Courbe de neutralité dans le cas R - R adiabatique.
 Fig. 2. - Neutral curve in the R - R case.

méthode de Gauss adaptée à la forme des matrices, puis on utilise le programme EIGZC de la bibliothèque I.M.S.L. Quand λ_0 est imaginaire pur, les résultats montrent une déviation du Grashof critique par rapport aux résultats de Hart [5]. Mais ils restent en accord avec ceux obtenues par Roux [11], qui utilise aussi une méthode Tau.

Cas R - R

La fonction $\lambda_0 = \lambda_0(Gr, Pr, h, k)$ est paire par rapport à h et k ; en effet si U est solution de (3.2) alors SU et $S_r U$ sont solutions de

$$(3.7) \quad \begin{cases} L_{h-k}(SU) = \lambda SU \\ L_{-hk}(S_r U) = \lambda S_r U. \end{cases}$$

Donc $Gr_0 = Gr_0(Pr, h, k)$ est une fonction paire par rapport à h et k , et le problème d'extremum Gr_c peut avoir des solutions de la forme $(h, 0)$ ou $(0, k)$. On vérifie numériquement que deux extremums locaux de Gr_0 sont de cette forme et que ce sont les seuls minimums de la fonction Gr_0 . Sur la figure 2 on a tracé $\inf_{h \in \mathbb{R}^*} Gr_0(Pr, h, 0)$ et $\inf_{k \in \mathbb{R}^*} Gr_0(Pr, 0, k)$. la valeur Gr_c est obtenue en prenant la plus petite des deux valeurs.

On vérifie numériquement les faits suivants : pour $0,001 \leq Pr \leq Pr_0$ ($Pr_0 \approx 0,034$), la valeur propre qui correspond à $Gr_c = Gr_c(Pr)$ est telle que $\lambda_0 = 0$, les vecteurs propres étant U_1 et $U_2 = S_r U_1$ tels que :

$$(3.8) \quad U_1 = U_1(z) e^{ihx} \quad \text{et} \quad U_2 = (S_r U_1(z)) e^{-ihx} = \bar{U}_1$$

avec $L_{h_0} U_1 = 0$, et $u_y(z) = 0$ (la symétrie S n'intervient pas puisqu'on a la composante u_y qui est nulle).

Pour $\text{Pr}_0 < \text{Pr}$, deux valeurs propres imaginaires pures $\lambda_0 = \pm i\omega_0$ correspondent à $\text{Gr}_c = \text{Gr}_c(\text{Pr})$, les vecteurs propres associés à la valeur propre $i\omega_0$ sont dans ce cas U_1 et $U_2 = S U_1$ tels que

$$(3.9) \quad U_1 = U_1(z) e^{iky}, \quad U_2 = (S U_1(z)) e^{-iky}$$

avec $L_{0,k} U_1 = i\omega_0 U_1$ et $S_r U_1(z) = -U_1(z)$.

Cas $\mathbf{R-L}$

La fonction $\lambda_0 = \lambda_0(\text{Pr}, \text{Gr}, h, k)$ est toujours paire par rapport à k (à cause de la symétrie S). De plus on a $\bar{\lambda}_0 = \lambda_0(\text{Pr}, \text{Gr}, -h, k)$; en effet si U est solution de (3.2) alors $S U$, \bar{U} et $S \bar{U}$ sont solutions de

$$(3.10) \quad \begin{cases} L_{h-k}(S U) = \lambda S U \\ \overline{L_{hk}(U)} = L_{-h-k}(\bar{U}) = \bar{\lambda} \bar{U} \\ \overline{L_{h-k}(S U)} = L_{-hk}(S \bar{U}) = \bar{\lambda} S \bar{U}. \end{cases}$$

Donc $\text{Gr}_0 = \text{Gr}_0(\text{Pr}, h, k)$ est comme dans le cas $\mathbf{R-R}$, une fonction paire de h et k (puisque Gr_0 est la valeur de Gr pour laquelle $\text{Re}(\lambda_0) = 0$). Gr_c pourrait ainsi être obtenu par une solution de la forme $(h, 0)$ ou $(0, k)$. On trouve numériquement que le minimum Gr_c est atteint pour (h, k) avec $h \approx k/10$. La solution $(0, k)$ est un extremum local et la solution $(h, 0)$ correspond à un point d'inflexion.

TABLEAU I. 1

Cas $\mathbf{R-R}$ adiabatique.
 $\mathbf{R-R}$ adiabatic case.

Pr	Gr_c	h	k	λ_0
0,001	7 942	1,346	0	0
0,005	8 020	1,343	0	0
0,01	8 168	1,340	0	0
0,02	8 640	1,345	0	0
0,02(*)	12 020	0	0,296	$i 8,95$
0,03	9 434	1,348	0	0
0,03(*)	10 160	0	0,350	$i 8,99$
0,034(*)	9 868	1,347	0	0
0,034	9 673	0	0,369	$i 9,03$
0,04(*)	10 660	1,344	0	0
0,04	9 109	0	0,392	$i 9,06$
0,05(*)	12 350	1,327	0	0
0,05	8 445	0	0,421	$i 9,08$
0,08	7 502	0	0,487	$i 9,42$
0,1	7 342	0	0,512	$i 9,75$
0,2	18 810	0	0,224	$i 11,80$

(*) Pour information.

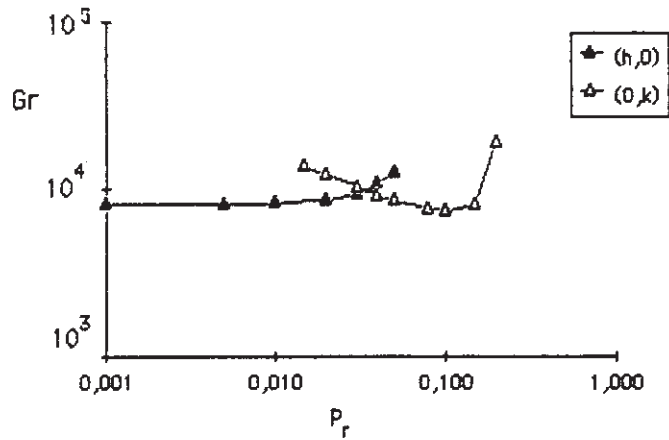


Fig. 2. — Courbe de neutralité dans le cas R – R adiabatique.
 Fig. 2. — Neutral curve in the R – R case.

méthode de Gauss adaptée à la forme des matrices, puis on utilise le programme EIGZC de la bibliothèque I.M.S.L. Quand λ_0 est imaginaire pur, les résultats montrent une déviation du Grashof critique par rapport aux résultats de Hart [5]. Mais ils restent en accord avec ceux obtenus par Roux [11], qui utilise aussi une méthode Tau.

Cas R – R

La fonction $\lambda_0 = \lambda_0(Gr, Pr, h, k)$ est paire par rapport à h et k ; en effet si U est solution de (3.2) alors SU et $S_r U$ sont solutions de

$$(3.7) \quad \begin{cases} L_{h-k}(SU) = \lambda SU \\ L_{hk}(S_r U) = \lambda S_r U. \end{cases}$$

Donc $Gr_0 = Gr_0(Pr, h, k)$ est une fonction paire par rapport à h et k , et le problème d'extremum Gr_c peut avoir des solutions de la forme $(h, 0)$ ou $(0, k)$. On vérifie numériquement que deux extremums locaux de Gr_0 sont de cette forme et que ce sont les seuls minimums de la fonction Gr_0 . Sur la figure 2 on a tracé $\inf_{h \in \mathbb{R}^*} Gr_0(Pr, h, 0)$ et $\inf_{k \in \mathbb{R}^*} Gr_0(Pr, 0, k)$. la valeur Gr_c est obtenue en prenant la plus petite des deux valeurs.

On vérifie numériquement les faits suivants : pour $0,001 \leq Pr \leq Pr_0$ ($Pr_0 \approx 0,034$), la valeur propre qui correspond à $Gr_c = Gr_c(Pr)$ est telle que $\lambda_0 = 0$, les vecteurs propres étant U_1 et $U_2 = S_r U_1$ tels que :

$$(3.8) \quad U_1 = U_1(z) e^{ihx} \quad \text{et} \quad U_2 = (S_r U_1(z)) e^{-ihx} = \bar{U}_1$$

avec $L_{h0} U_1 = 0$, et $u_y(z) = 0$ (la symétrie S n'intervient pas puisqu'on a la composante u_y qui est nulle).

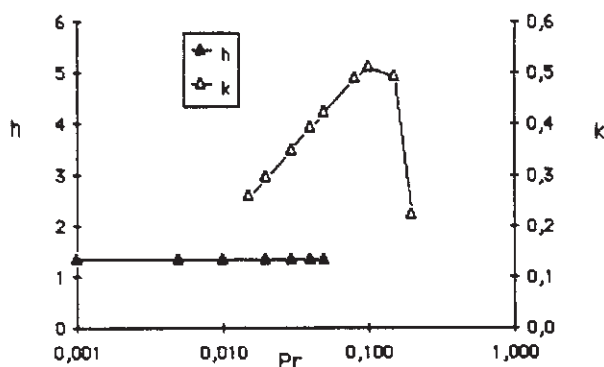


Fig. 3. Nombre d'onde dans le cas R-R adiabatique.
 Fig. 3. — Wave number in the R-R case.

La valeur propre qui correspond à la valeur $Gr_c = Gr_c(Pr)$ est telle que $\lambda_0 = \pm i\omega_0$, les vecteurs propres associés à la valeur propre $i\omega_0$ sont dans ce cas U_1 et $U_2 = S U_1$ tels que

$$(3.11) \quad U_1 = U_1(z) e^{i(hx + ky)}, \quad U_2 = (S U_1(z)) e^{i(hx - ky)}$$

avec $L_{hk} U_1 = i\omega_0 U_1$.

On peut voir dans le tableau I.2 et la figure 5 que le nombre d'onde h est toujours très petit par rapport à k , ce qui peut justifier la recherche de solution ne dépendant pas de x . De plus puisque la période par rapport à x est si importante, celle-ci ne pourra jamais être mise en évidence par une expérience. On ne peut plus négliger les conditions aux limites verticales.

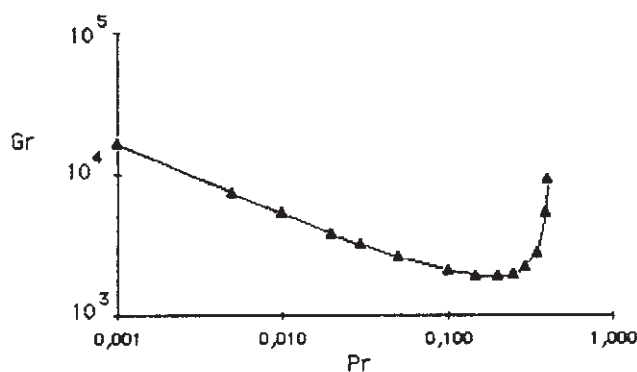


Fig. 4. — Courbe de neutralité dans le cas R-I adiabatique.
 Fig. 4. — Neutral curve in the R-I adiabatic case.

TABLEAU I. 2
Cas R-L adiabatique.
R-F adiabatic case.

Pr	Gr _c	h	k	λ ₀
0,001	16 200	0,006	0,044	i3,955
0,005	7 318	0,012	0,097	i3,939
0,01	5 239	0,016	0,136	i3,923
0,02	3 797	0,019	0,187	i3,899
0,03	3 175	0,020	0,223	i3,885
0,05	2 579	0,018	0,279	i3,876
0,1	2 051	0,010	0,352	i3,933
0,15	1 892	0,001	0,395	i4,065
0,155	1 885	0,000	0,397	i4,082
0,16	1 879	-0,000	0,400	i4,099
0,2	1 873	-0,005	0,415	i4,259
0,25	1 958	-0,010	0,419	i4,517
0,3	2 178	-0,012	0,399	i4,846
0,35	2 710	-0,011	0,342	i5,255
0,4	5 298	0,005	0,185	i5,730
0,41	9 161	-0,003	0,108	i5,825

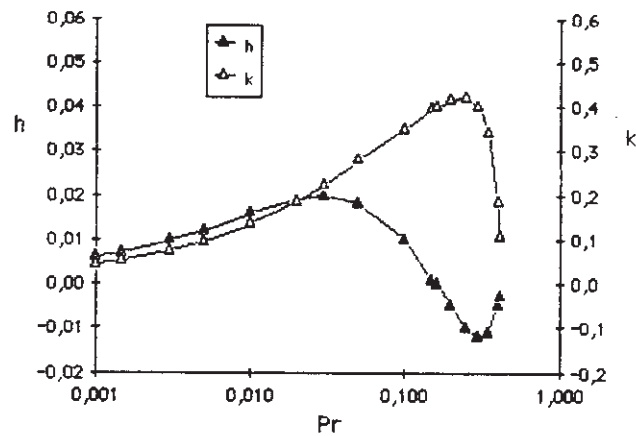


Fig. 5. — Nombre d'onde dans le cas R-L adiabatique.

Fig. 5. — Wave number in the R-F adiabatic case.

4. Obtention du système différentiel sur la variété centrale

4.1. GÉNÉRALITÉS

Dans l'étude qui suit on note

$$(4.1) \quad \mu = Gr - Gr_c.$$

Le système (2.3) s'écrit sous la forme

$$(4.2) \quad \frac{dW}{dt} = F_\mu(W) = L_\mu W + N_\mu(W, W)$$

ou

$$(4.3) \quad \frac{dW}{dt} = L_0 W + \mu L_1 W + M(W, W) + \mu M(W, W)$$

avec $W = (u, \theta) \in \mathcal{D}$ et $L_\mu = L_0 + \mu L_1$, $N_\mu = M + \mu M$.

En effet on restreint le domaine Ω_∞ au domaine fondamental de périodicité $\Omega_\#$, qui doit vérifier les propriétés suivantes : (1) tout point de Ω_∞ est l'image par τ_s et τ'_s d'un point de $\Omega_\#$, (2) $\Omega_\#$ est invariant par l'action de la réflexion S (et éventuellement S_r). On peut préciser $\Omega_\#$ pour les différents cas rencontrés :

$$\Omega_\# = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -1 \leq z \leq 1 \}$$

- cas R - R : a est multiple de $2 \pi/h$, car la solution sera invariante par τ'_s ;
- cas R - R et $\lambda_0 = \pm i \omega_0$: b est multiple de $2 \pi/k$, car la solution sera invariante par τ_s ;
- cas R - L et $\lambda_0 = \pm i \omega_0$: a est multiple de $2 \pi/h$ et b de $2 \pi/k$.

Le cadre fonctionnel, qui est détaillé dans [7] et [8], est choisi de façon à ce que le problème de Cauchy pour (4.3) admette une solution unique. On peut brièvement préciser certaines notations :

- $L(\Omega_\#)$ est l'espace des champs de vecteur de carré intégrable dans $\Omega_\#$ muni du produit scalaire $(u, v) = \int_{\Omega_\#} u(X) \cdot \bar{v}(X) dX$;

- H est la fermeture dans $L(\Omega_\#)$ des champs de divergence nulle, qui admet la périodicité $\Omega_\#$ par rapport à x et y ($\tau_{2 \pi/h} u = \tau'_{2 \pi/k} u = u$) et dont la composante normale à $\partial\Omega_\#$ en $z = \pm 1$ est nulle;

- on appelle que H^m est l'espace des fonctions de carré intégrable dans $\Omega_\#$ et de périodicité $\Omega_\#$, dont les dérivées partielles au sens des distributions jusqu'à l'ordre m sont aussi de carré intégrable.

La propriété fondamentale de H est d'avoir pour complément orthogonal dans $L(\Omega_\#)$ l'espace des champs de la forme ∇q , où $q \in H^1$. On note π_0 la projection orthogonale sur H dans $LH(\Omega_\#)$. Finalement, l'espace fonctionnel où est résolu l'équation (4.3) est $\mathcal{D} = \{ H \cap \{ u \in (H^2(\Omega_\#))^3 / u \text{ vérifie les conditions aux limites sur } \partial\Omega_\# \} \} \times \{ \theta \in H^2(\Omega_\#) / \theta \text{ vérifie les conditions aux limites} \}$.

Les opérateurs linéaires L_0 et L_1 et l'opérateur bilinéaire M sont définis par

$$(4.4) \quad \begin{aligned} L_0 W &= \begin{bmatrix} -\text{Gr}_c(U_0, \nabla u + u \cdot \nabla U_0) - \nabla q + \theta e_z + \Delta u \\ -\text{Gr}_c(U_0, \nabla \theta + u \cdot \nabla T_0) + \frac{\Delta \theta}{\text{Pr}} \end{bmatrix} \\ L_1 W &= \begin{bmatrix} -(U_0 \cdot \nabla u + u \cdot \nabla U_0) - \nabla q \\ -(U_0 \cdot \nabla \theta + u \cdot \nabla T_0) \end{bmatrix} \\ M(W_1, W_2) &= \begin{bmatrix} -\frac{\text{Gr}_c}{2}(u_1 \cdot \nabla u_2 + u_2 \cdot \nabla u_1) - \nabla q \\ -\frac{\text{Gr}_c}{2}(u_1 \cdot \nabla \theta_2 + u_2 \cdot \nabla \theta_1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Les termes « ∇q » dans (4.4) sont adaptés de façon à ce que les expressions appartiennent à H (c'est-à-dire soient de divergence nulle). L'adjonction de ces formes revient à appliquer la projection π_0 .

L'opérateur adjoint de L_0 , L_0^* tel que

$$(4.5) \quad \forall (W_1, W_2) \in \mathcal{D}^2 \quad (L_0 W_1, W_2) = (W_1, L_0^* W_2)$$

s'écrit

$$(4.6) \quad L_0^* W = \begin{bmatrix} \text{Gr}_c(U_0, \nabla u + (\nabla U_0)^t \cdot u - \theta \nabla T_0) - \nabla q + \Delta u \\ \text{Gr}_c(U_0, \nabla \theta) + u_z + \frac{\Delta \theta}{\text{Pr}} \end{bmatrix}.$$

Si U_1 est un vecteur propre de L_0 associé à la valeur propre λ , alors on notera U_1^* le vecteur propre de L_0^* associé à la valeur propre $\bar{\lambda}$, tel que $(U_1, U_1^*) = 1$ (car il s'agit d'une valeur propre semi-simple).

4.2. DÉCOMPOSITION DU SYSTÈME DIFFÉRENTIEL

En utilisant la translation par rapport à la température $\tau_{\theta s}$, on peut montrer que 0 est toujours valeur propre de L_μ . En effet on a vu dans le paragraphe 2 que

$$(4.7) \quad \begin{cases} L_\mu(\tau_{\theta s} W) = L_\mu(W) \\ N_\mu(\tau_{\theta s} W, \tau_{\theta s} W) = N_\mu(W, W). \end{cases}$$

En dérivant la relation $F_\mu(\tau_{\theta s}(0)) = 0$ par rapport à s , on montre que $U_0 = (0, 1)$ est vecteur propre de L_μ associé à la valeur propre 0. On a de plus

$$(4.8) \quad \forall W \in \mathcal{D}, \quad M(W, U_0) = 0.$$

De même L_μ^* admet pour valeur propre 0. Si on note U_μ^* le vecteur propre associé, on obtient

$$(4.9) \quad U_\mu^* = \begin{bmatrix} \frac{\mu + Gr_c(z^2 - 1)}{32} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{dans le cas R - R}$$

$$(4.10) \quad U_\mu^* = \begin{bmatrix} \frac{\mu + Gr_c(z + 1)(z - 3)}{32} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{dans le cas R - L}$$

Si on décompose $W = z_0 U_0 + V$ avec $(V, U_0^*) = 0$, l'équation (4.2) peut s'écrire sous la forme d'un système à deux équations

$$(4.11) \quad \frac{dV}{dt} = L_0 V + \mu P(L_1 V) + P(N_\mu(V, V))$$

et

$$(4.12) \quad \frac{dz_0}{dt} = \mu(L_1 V, U_0^*) + (N_\mu(V, V), U_0^*)$$

où P est la projection de \mathcal{D} sur $\mathcal{D}' = (U_0^*)^\perp$ (avec le produit scalaire de $L(\Omega)$).

On remarque que la première équation est découplée de celle qui régit z_0 . La résolution de (4.11) permettra ensuite, en reportant V dans (4.12) de calculer l'évolution de la « température moyenne ».

On montre aussi directement que tout élément de \mathcal{D} de la forme $W(z) e^{i(nhx + mky)}$ appartient à \mathcal{D}' si $(n, m) \neq (0, 0)$, en effet

$$(W(z) e^{i(nhx + mky)}, U_0^*) = \int_{\Omega_x} (u_x(z) u_0^*(z) + \theta(z)) e^{i(nhx + mky)} dv = 0$$

puisque Ω_x est le domaine fondamental de périodicité.

4.3. RÉDUCTION SUR LA VARIÉTÉ CENTRALE

Pour notre problème la valeur $\mu = 0$ correspond au fait que l'opérateur linéaire L_0 , restreint à \mathcal{D}' , a des valeurs propres appartenant à l'axe des imaginaires purs. Le problème est alors la non-simplicité des valeurs propres.

La méthode va consister à étudier la trace de l'équation (4.11) sur la variété centrale, dont la dimension est égale à la somme des multiplicités des valeurs propres de L_0 . En

effet, il suffit de connaître le comportement des solutions de (4.11) appartenant à la variété centrale, car celle-ci est localement attractive au voisinage de $W=0$.

On décompose \mathcal{L}' sous la forme suivante :

$$(4.13) \quad \mathcal{L}' = E_0 \oplus E_-$$

ou

$$(4.14) \quad \forall V \in \mathcal{L}', \quad \exists ! (Z, Y) \in E_0 \times E_- \quad \text{tel que } V = Z + Y$$

où E_0 est le sous espace de dimension finie invariant par L_0 , qui est relatif aux valeurs propres de L_0 de partie réelle nulle, et, E_- est le supplémentaire de E_0 qui correspond à l'espace relatifs aux valeurs propres de partie réelle négative.

La variété centrale \mathcal{M}_μ est un graphe défini par

$$\mathcal{M}_\mu = \{ (Z, Y) \in E_0 \times E_- / Y = \Phi(\mu, Z) \text{ avec } \Phi(\mu, 0) = D_Z \Phi(0, 0) = 0 \}.$$

La trace sur la variété centrale de l'équation (4.11) sera de la forme

$$(4.15) \quad \frac{dZ}{dt} = \mathcal{F}(\mu, Z)$$

avec $\mathcal{F}(\mu, 0) = 0$ et $\partial \mathcal{F} / \partial Z(0, 0) = P_0 L_0$ où P_0 est la projection de \mathcal{L}' sur E_0 .

Pour pouvoir calculer les coefficients intervenant dans le système (4.15), on écrit le développement de Taylor au voisinage de 0 de Φ , puis on le remplace dans (4.11) et en utilisant (4.14) et (4.15) on identifie les puissances de μ et Z . On peut construire la variété centrale de façon à ce que les propriétés d'invariance décrites en 2 soient conservées sur le système (4.11), ainsi on pourra réduire le nombre de coefficients à calculer.

4.4. CAS $R = R, \lambda_0 = 0$

On note U_1 et $\bar{U}_1 = S_r U_1$ les vecteurs propres sur \mathcal{L}' de L_0 pour la valeur propre nulle. La décomposition (4.13) s'écrit ici :

$$(4.16) \quad Z = z_1 U_1 + \bar{z}_1 \bar{U}_1$$

et la variété centrale est de dimension 2 :

$$(4.17) \quad Y = \Phi(\mu, Z) = \sum_{p+q+r \geq 2} \mu^p \Phi_{pqr} z_1^q \bar{z}_1^r, \quad \Phi_{p00} = 0, \quad \Phi_{010} = \Phi_{001} = 0.$$

En appliquant les invariances du problème aux vecteurs U_1 et U_0 , on obtient les relations

$$(4.18) \quad \begin{cases} S_r U_1 = \bar{U}_1 & \text{et} & S_r U_0 = -U_0 \\ \tau_s U_1 = e^{ihs} U_1. \end{cases}$$

La trace (4.15) sur la variété centrale s'écrit

$$(4.19) \quad \frac{dZ}{dt} = \overline{f_1(\mu, z_1, \bar{z}_1)} U_1 + f_1(\mu, z_1, \bar{z}_1) \bar{U}_1$$

et la composante suivant U_0 vérifie

$$(4.20) \quad \frac{dz_0}{dt} = f_0(\mu, z_1, \bar{z}_1)$$

en utilisant les relations (4.18) et l'équivariance de f_1 et f_0 , on obtient les relations

$$(4.21) \quad \begin{cases} \overline{f_1(\mu, \bar{z}_1, z_1)} = f_1(\mu, z_1, \bar{z}_1) \\ f_1(\mu, e^{ihs} z_1, e^{-ihs} \bar{z}_1) = e^{ihs} f_1(\mu, z_1, \bar{z}_1) \end{cases}$$

et

$$(4.22) \quad \begin{cases} f_0(\mu, \bar{z}_1, z_1) = -f_0(\mu, z_1, \bar{z}_1) \\ f_0(\mu, e^{ihs} z_1, e^{-ihs} \bar{z}_1) = f_0(\mu, z_1, \bar{z}_1) \end{cases}$$

le système (4.19) peut finalement s'écrire sous la forme

$$(4.23) \quad \frac{dz_1}{dt} = a \mu z_1 + b z_1^2 \bar{z}_1 + O(|\mu|^2 |z_1| + |z_1|^5)$$

où a et b sont réels. De plus z_0 est constant, puisque si on fait $hs = -2 \arg(z_1)$ dans (4.22) on a immédiatement $f_0 \equiv 0$

$$(4.24) \quad \frac{dz_0}{dt} = 0$$

on pourra ainsi écrire par la suite que

$$P(N_\mu(Z+Y, Z+Y)) = N_\mu(Z+Y, Z+Y) \quad \text{et} \quad P(L_1(Z+Y)) = L_1(Z+Y).$$

Il s'agit de calculer a et b . On identifie donc les puissances de μ et z_1, \bar{z}_1 dans l'expression :

$$(4.25) \quad L_0(Z+Y) + M(Z+Y, Z+Y) + \mu L_1(Z+Y) + \mu M(Z+Y, Z+Y) \\ = \frac{dz_1}{dt} U_1 + \frac{d\bar{z}_1}{dt} \bar{U}_1 + \sum_{p+q+r \geq 2} \mu^p \Phi_{pqr} \frac{d}{dt} (z_1^q \bar{z}_1^r)$$

où dz_1/dt est remplacé par (4.23) et Z et Y par (4.16) et (4.17).

On obtient à l'ordre μz_1 :

$$(4.26) \quad L_0 \Phi_{110} + L_1 U_1 = a U_1$$

où U_1 est de la forme (3.8), on a alors

$$(4.27) \quad \Phi_{110} = \Phi_{110}(z) e^{ihs}$$

avec

$$(4.28) \quad L_{h0} \Phi_{110} = L_{h0}^1 U_1 + a U_1$$

où on a noté ici L_{hk}^1 l'opérateur défini par

$$(4.29) \quad L_{hk}^1 \mathbf{W} = \begin{bmatrix} -ih U_0(z) \mathbf{u}_x - D U_0 \mathbf{u}_z - ih \mathbf{q} \\ -ih U_0(z) \mathbf{u}_y & -ik \mathbf{q} \\ -ih U_0(z) \mathbf{u}_z & -D \mathbf{q} \\ -ih U_0(z) \boldsymbol{\theta} - \frac{\mathbf{u}_x}{16} & -D T_0 \mathbf{u}_z \end{bmatrix}$$

A l'ordre 2 en $z_1 \bar{z}_1$, on obtient à partir de la relation (4.25) :

$$(4.30) \quad \sum_{q+r=2} z_1^q \bar{z}_1^r L_0(\Phi_{0qr}) + M(Z, Z) = 0$$

ce qui conduit de façon plus explicite à :

$$(4.31) \quad \begin{cases} \Phi_{020} = \Phi_{020}(z) e^{2ihx}, & \Phi_{011} = \Phi_{011}(z), & \Phi_{002} = \Phi_{002}(z) e^{-2ihx} \\ L_{2h,0} \Phi_{020} = -M_{h,0,h,0}(U_1, U_1), & \Phi_{002} = \bar{\Phi}_{020} \\ L_{00} \Phi_{011} = -2M_{h,0,-h,0}(U_1, \bar{U}_1) \end{cases}$$

où les opérateurs linéaires $L_{2h,0}$, L_{00} sont inversibles et M_{hkim} est l'opérateur défini par :

$$M_{hkim}(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2) = -\frac{Gr_c}{2} (\mathbf{W}_1 \cdot \nabla_{lm} \mathbf{W}_2 + \mathbf{W}_2 \cdot \nabla_{hk} \mathbf{W}_1)$$

et

$$\mathbf{W}_1 \cdot \nabla_{lm} \mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} il \mathbf{u}_{1x} \mathbf{u}_{2x} + im \mathbf{u}_{1y} \mathbf{u}_{2x} + \mathbf{u}_{1z} D \mathbf{u}_{2x} \\ il \mathbf{u}_{1x} \mathbf{u}_{2y} + im \mathbf{u}_{1y} \mathbf{u}_{2y} + \mathbf{u}_{1z} D \mathbf{u}_{2y} \\ il \mathbf{u}_{1x} \mathbf{u}_{2z} + im \mathbf{u}_{1y} \mathbf{u}_{2z} + \mathbf{u}_{1z} D \mathbf{u}_{2z} \\ il \mathbf{u}_{1x} \boldsymbol{\theta}_2 + im \mathbf{u}_{1y} \boldsymbol{\theta}_2 + \mathbf{u}_{1z} D \boldsymbol{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

A l'ordre 3 en z_1, \bar{z}_1 , on obtient de la même façon :

$$(4.32) \quad \sum_{q+r=3} z_1^q \bar{z}_1^r L_0(\Phi_{0qr}) + 2M(Z, \sum_{q+r=2} z_1^q \bar{z}_1^r \Phi_{0qr}) = bz_1^2 \bar{z}_1 U_1 + \text{conj.}$$

ce qui conduit à

$$(4.33) \quad \Phi_{0qr} = \Phi_{0qr}(z) e^{i(q-r)hx}, \quad \Phi_{0rq} = \bar{\Phi}_{0qr}$$

$$(4.34) \quad \begin{cases} L_{2h,0} \Phi_{020} = -M_{h,0,2h,0}(U_1, \Phi_{020}), \\ L_{h,0} \Phi_{021} = -2M_{h,0,0,0}(U_1, \Phi_{011}) - 2M_{-h,0,2h,0}(\bar{U}_1, \Phi_{020}) + b U_1. \end{cases}$$

Les coefficients a et b de l'équation (4.23) se déduisent de (4.28) et (4.34), puisque l'opérateur $L_{h,0}$ n'est pas inversible. Ils sont nécessaires pour réaliser la condition de compatibilité du second membre, qui peut s'exprimer en effectuant un produit scalaire de la forme (second membre, U_1^*) = 0.

TABLEAU II
 Cas R - R, $\lambda_0 = 0$.
 Case R - R, $\lambda_0 = 0$.

Pr	Gr _c	$a \cdot 10^{*3}$	$b \cdot 10^{*3}$
0,001	7 942	1,33	-5,71
0,005	8 020	1,32	-5,67
0,01	8 168	1,29	-5,69
0,02	8 640	1,20	-5,68
0,03	9 434	1,10	-5,73
0,034 (*)	9 868	1,06	-5,80
0,04 (*)	10 660	1,01	-5,97
0,05 (*)	12 350	0,98	-6,45

Dans le tableau II, on donne les valeurs numériques de a et b pour différentes valeurs de Pr.

On résoud maintenant l'équation (4. 23) en passant en coordonnées polaires, on montre ainsi que si $\mu > 0$, $a > 0$ et $b < 0$ l'écoulement tend vers un écoulement stationnaire dont la partie principale (défini à une translation par rapport à x près) s'écrit :

$$\begin{aligned}
 (4. 35) \quad W(x, z) = \varepsilon (\mathbf{U}_1(z) e^{ihx} + \bar{\mathbf{U}}_1(z) e^{-ihx}) + \varepsilon^2 (\Phi_{020}(z) e^{2 ihx} \\
 + \Phi_{011}(z) + \bar{\Phi}_{020}(z) e^{-2 ihx}) + O(\varepsilon^4) \\
 \varepsilon^2 = -\frac{a}{b} \mu + O(\mu^2).
 \end{aligned}$$

Cette solution est de période $2\pi/h$ par rapport à x . La solution finale sera obtenue en ajoutant l'écoulement de base à cette solution. Les valeurs de a et b données dans le tableau II montrent que cet écoulement est toujours stable pour $Pr \leq Pr_0$.

La figure 6 représente sur une période dans le plan XOZ, la fonction de courant et les isothermes de la solution finale et de la perturbation pour le cas $Pr = 0,03$.

4. 5. CAS R - R, $\lambda_0 = i\omega_0$, $\bar{\lambda}_0 = -i\omega_0$

On note U_1 et $U_2 = S U_1$ les vecteurs propres sur \mathcal{Q}' de L_0 pour la valeur $i\omega_0$. La décomposition (4. 13) s'écrit ici :

$$(4. 36) \quad Z = z_1 U_1 + z_2 U_2 + \bar{z}_1 \bar{U}_1 + \bar{z}_2 \bar{U}_2$$

et la variété centrale est le graphe de dimension 4 :

$$\begin{aligned}
 (4. 37) \quad Y = \Phi(\mu, Z) = \sum_{p+q+r+m+n \geq 2} \mu^p \Phi_{pqrmn} z_1^q \bar{z}_1^r z_2^m \bar{z}_2^n \\
 \Phi_{p0000} = 0, \quad \Phi_{01000} = \Phi_{00100} = \Phi_{00010} = \Phi_{00001} = 0.
 \end{aligned}$$

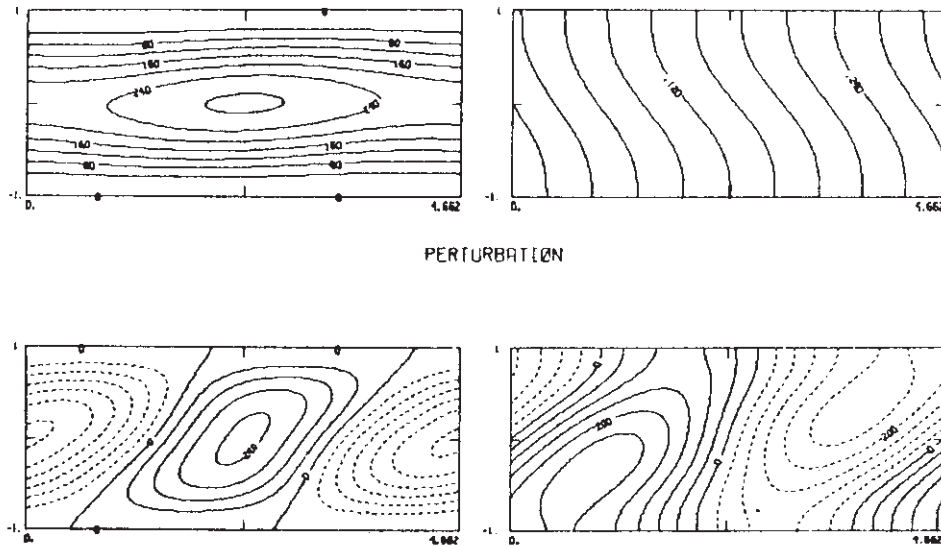


Fig. 6. - Fonction de courant et isothermes en projection sur (x, z) dans le cas R-R adiabatique.

Fig. 6. - Stream function and isothermal lines in the plane xOz in the R-R adiabatic case.
 $PR=0.03$, $Gr=10^4$, $h=1,35$, $c=0.01$, $L=4.662$.

En appliquant les invariances du problème aux vecteurs U_1 , U_2 et U_0 , on obtient les relations

$$(4.38) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_r U_1 = S U_1, \quad S_r U_2 = -U_2 \quad \text{et} \quad S_r U_0 = -U_0 \\ S U_1 = U_2 \\ \tau'_s U_1 = e^{iks} U_1, \quad \tau'_s U_2 = e^{-iks} U_2 \quad \text{et} \quad \tau'_s U_0 = U_0. \end{array} \right.$$

La trace (4.15) du système sur la variété centrale s'écrit

$$(4.39) \quad \frac{dZ}{dt} = f_1(\mu, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) U_1 + f_2(\mu, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) U_2 + \text{Conjugué.}$$

et la composante suivant U_0 vérifie

$$(4.40) \quad \frac{dz_0}{dt} = f_0(\mu, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)$$

On éliminera les coefficients d , e , f , g et h du système (4.43) en effectuant les changements de variables en prenant

$$(4.47) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta = \frac{d}{2i\omega_0}, \quad \alpha_{2010} = \gamma_{1020} = -\frac{e}{2i\omega_0}, \quad \alpha_{1101} = \gamma_{0111} = \frac{f}{2i\omega_0}, \\ \alpha_{0102} = \gamma_{0201} = \frac{g}{4i\omega_0}, \quad \alpha_{0012} = \gamma_{1200} = \frac{h}{2i\omega_0} \end{array} \right.$$

et le système (4.43) s'écrira finalement dans le nouveau système de coordonnées (on a supprimé les ' pour simplifier)

$$(4.48) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dz_1}{dt} = i\omega_0 z_1 + \mu a z_1 + b z_1^2 \bar{z}_1 + c z_1 z_2 \bar{z}_2 + \text{termes d'ordres supérieurs} \\ \frac{dz_2}{dt} = i\omega_0 z_2 + \mu a z_2 + b z_2^2 \bar{z}_2 + c z_2 z_1 \bar{z}_1 + \text{termes d'ordres supérieurs.} \end{array} \right.$$

Pour calculer les coefficients a , b et c , on procède de la même manière que précédemment. Il suffira d'identifier les puissances de μ , z_1 , \bar{z}_1 , z_2 , \bar{z}_2 dans l'expression (puisque $(dz_0/dt) = 0$):

$$(4.49) \quad L_0(Z+Y) + M(Z+Y, X+Y) + \mu L_1(Z+Y) + \mu M(Z+Y, Z+Y) \\ = \frac{dz_1}{dt} U_1 + \frac{d\bar{z}_1}{dt} \bar{U}_1 + \frac{dz_2}{dt} U_2 + \frac{d\bar{z}_2}{dt} \bar{U}_2 + \sum_{p+q+r+m+n \geq 2} \mu^p \Phi_{pqrmn} \frac{d}{dt} (z_1^q \bar{z}_1^r z_2^m \bar{z}_2^n)$$

où (dz_1/dt) et (dz_2/dt) sont remplacés par (4.48) et Z et Y par (4.36) et (4.37).

On obtient à l'ordre μz_1 :

$$(4.50) \quad L_0 \Phi_{11000} + L_1 U_1 = a U_1 + i\omega_0 \Phi_{11000}$$

où U_1 est de la forme (3.9), on a alors

$$(4.51) \quad \Phi_{11000} = \Phi_{11000}(z) e^{iky}$$

avec

$$(4.52) \quad (L_{0k} - i\omega_0) \Phi_{11000} = L_{0k}^1 U_1 + a U_1.$$

A l'ordre 2 en z_1 , \bar{z}_1 , z_2 , \bar{z}_2 on obtient à partir de la relation (4.49):

$$(4.53) \quad \sum_{q+r+m+n=2} z_1^q \bar{z}_1^r z_2^m \bar{z}_2^n L_0(\Phi_{0qrmn}) + M(Z, Z) \\ = \sum_{q+r+m+n=2} i\omega_0 (q-r+m-n) z_1^q \bar{z}_1^r z_2^m \bar{z}_2^n \Phi_{0qrmn}$$

ce qui conduit de façon plus explicite à :

$$\Phi_{0qrmn} = \Phi_{0qrmn}(z) e^{i(q-r+m+n)ky}$$

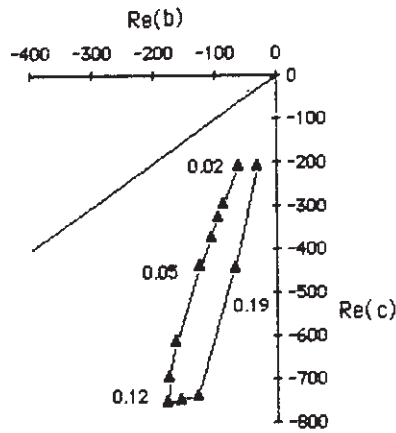


Fig. 7
Fig. 7

(b) $z_1 = z_2$ (les autres solutions se déduisent par une translation en y ou t)

$$(4.58) \left\{ \begin{array}{l} W(y, z, t) = \varepsilon (U_1(z) e^{i(ky + \omega t)} + S U_1(z) e^{i(-ky + \omega t)} + \text{conjugué}) \\ + \varepsilon^2 (\Phi_{02000}(z) e^{2i(ky + \omega t)} + S \Phi_{00020}(z) e^{2i(-ky + \omega t)} + \Phi_{01010}(z) e^{2iky} \\ + \frac{1}{2} (\Phi_{01100}(z) + S \Phi_{01100}(z)) + \Phi_{01010}(z) e^{2i\omega t} + \text{conj.}) + O(\varepsilon^3) \\ \varepsilon^2 = - \frac{\text{Re}(a)}{\text{Re}(b) + \text{Re}(c)} \mu + O(\mu^2) \\ \omega = \omega_0 + \varepsilon^2 \left(\frac{\text{Re}(a)(\text{Im}(b) + \text{Im}(c)) - \text{Im}(a)(\text{Re}(b) + \text{Re}(c))}{\text{Re}(a)} \right) + O(\varepsilon^3). \end{array} \right.$$

Cet écoulement est invariant par la symétrie S , et est stable si et seulement si $\text{Re}(b+c) < 0$ et $\text{Re}(b-c) < 0$.

Dans le tableau III on donne les valeurs numériques de a , b et c en fonction du nombre de Prandtl, et sur la figure 7 on a tracé l'évolution de $\text{Re}(b)$ et $\text{Re}(c)$ quand on modifie le nombre de Prandtl.

Sur la figure 8, on a représenté la solution obtenue à $t=0$, dans le cas $\text{Pr}=0,04$ et $\text{Gr}=9300$. On a tracé dans le plan yOz et sur une période, les isothermes de la perturbation et de la solution finale, puis le champ de vitesse, et les isovaleurs correspondant à la variation de la composante u_x en fonction de x et y .

4.6. CAS R-L, $\lambda_0 = i\omega_0$, $\lambda_0 = -i\omega_0$

On reprend les mêmes notations que dans le paragraphe 4.4, où on a noté U_1 et $U_2 = S U_1$ les vecteurs propres sur \mathcal{S}' de L_0 pour la valeur $i\omega_0$.

TABLEAU III
 Cas R-R, $\lambda_0 = i\omega_0$.
 Case R-R, $\lambda_0 = i\omega_0$.

Pr	$a \cdot 10^{+4}$	Re(b)	Im(b)	Re(c)	Im(c)
0.02 (*)	2,80 + i 5,20	- 61,41	- 99,32	-209,70	110,97
0.03 (*)	3,26 + i 6,19	- 85,86	-136,87	-295,31	161,38
0.04	3,59 + i 6,95	-106,95	-167,84	-372,15	178,45
0.05	3,81 + i 7,56	-125,05	-193,43	-440,97	202,26
0.08	4,13 + i 8,81	-163,15	-243,26	-611,85	248,31
0.1	4,12 + i 9,28	-175,59	-257,44	-695,94	263,70
0.15	3,43 + i 9,20	-154,97	-227,40	-747,28	254,81
0.17	2,85 + i 8,40	-128,20	-192,01	-737,40	164,30
0.2	1,28 + i 4,47	- 30,51	45,14	-210,53	41,04

En appliquant les invariances du problème aux vecteurs U_1 , U_2 et U_0 , on obtient les relations

$$(4.59) \quad \begin{cases} SU_1 = U_2 \\ \tau_s U_1 = e^{ihs} U_1, & \tau_s U_2 = e^{ihs} U_2 & \text{et} & \tau_s U_0 = U_0 \\ \tau'_s U_1 = e^{iks} U_1, & \tau'_s U_2 = e^{-iks} U_2 & \text{et} & \tau'_s U_0 = U_0 \end{cases}$$

en utilisant les relations (4.18) et l'équivariance de f_1 et f_0 , on obtient les relations

$$(4.60) \quad \begin{cases} f_2(\mu, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) = f_1(\mu, z_2, \bar{z}_2, z_1, \bar{z}_1) \\ f_1(\mu, e^{ihs} z_1, e^{-ihs} \bar{z}_1, e^{ihs} z_2, e^{-ihs} \bar{z}_2) = e^{ihs} f_1(\mu, z_2, \bar{z}_2, z_1, \bar{z}_1) \\ f_1(\mu, e^{iks} z_1, e^{-iks} \bar{z}_1, e^{-iks} z_2, e^{iks} \bar{z}_2) = e^{iks} f_1(\mu, z_2, \bar{z}_2, z_1, \bar{z}_1) \end{cases}$$

et

$$(4.61) \quad \begin{cases} f_0(\mu, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) = f_0(\mu, z_2, \bar{z}_2, z_1, \bar{z}_1) \\ f_0(\mu, e^{ihs} z_1, e^{-ihs} \bar{z}_1, e^{ihs} z_2, e^{-ihs} \bar{z}_2) = f_0(\mu, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) \\ f_0(\mu, e^{iks} z_1, e^{-iks} \bar{z}_1, e^{-iks} z_2, e^{iks} \bar{z}_2) = f_0(\mu, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) \end{cases}$$

le système (4.15) peut finalement s'écrire sous la forme

$$(4.62) \quad \begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = i\omega_0 z_1 + \mu az_1 + bz_1^2 \bar{z}_1 + cz_1 z_2 \bar{z}_2 + O(|\mu|^2 |z_2| \\ \hspace{15em} + |\mu|(|z_1| + |z_2|)^2 + |z_2|(|z_2| + |z_1|)^4) \\ \frac{dz_2}{dt} = i\omega_0 z_2 + \mu az_2 + bz_2^2 \bar{z}_2 + cz_2 z_1 \bar{z}_1 \\ \hspace{15em} + O(|\mu|^2 |z_2| + |\mu|(|z_1| + |z_2|)^2 + |z_2|(|z_2| + |z_1|)^4) \end{cases}$$

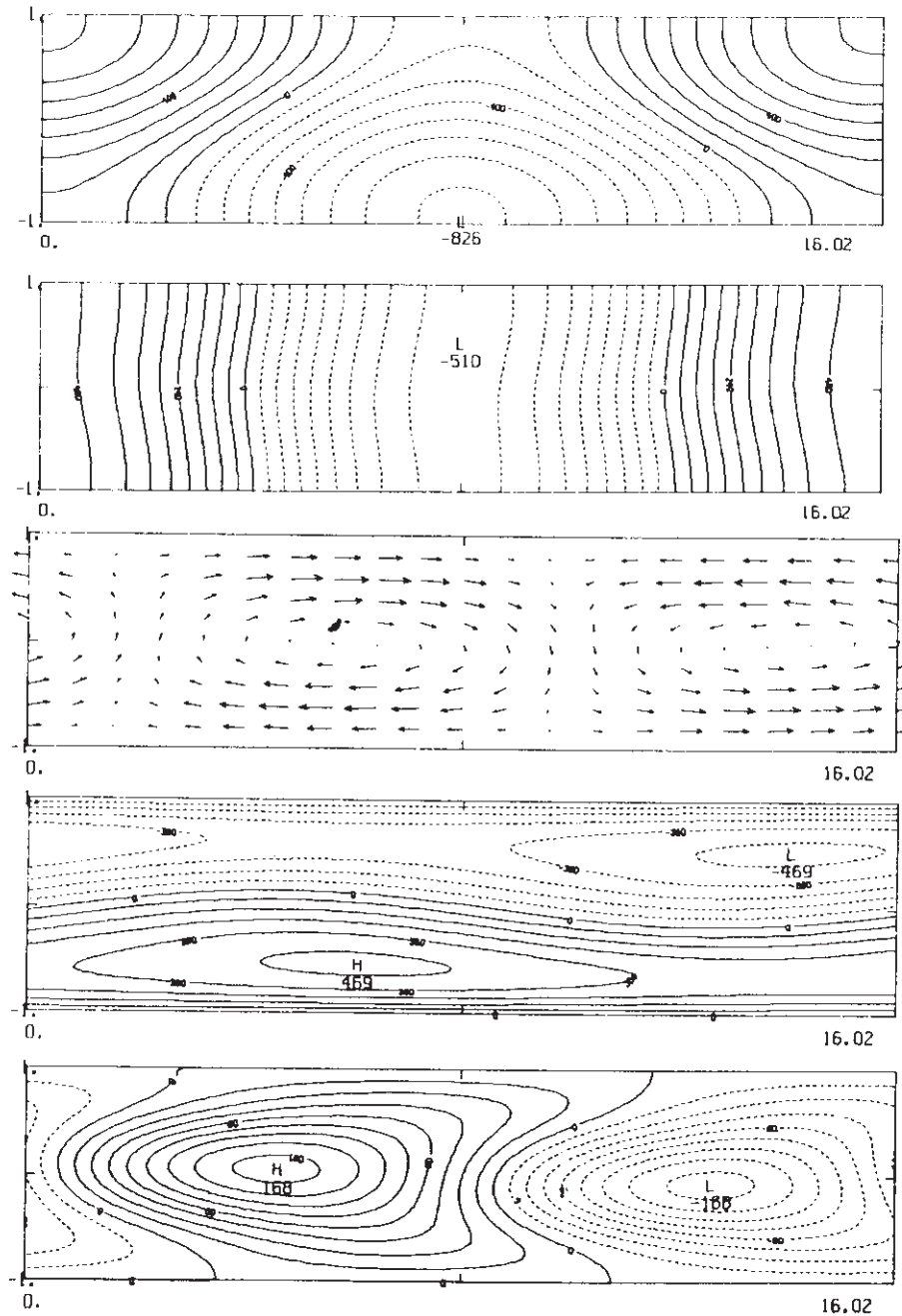


Fig. 8. — $Pr=0.04$, $Gr=9300$, $\varepsilon=0.025$, $k=0.392$, $\omega=3.06$. (a) Isothermes dans le plan yOz , écoulement de base + perturbation. (Isothermal lines in the yOz plane, main flow + perturbation). (b) Isothermes dans le plan yOz , perturbation. (Isothermal lines in the yOz plane, perturbation). (c) Champs des vitesses dans le plan yOz . (Stream vectors in the yOz plane). (d) Isovaleurs de la composante u_x dans le plan yOz . Écoulement de base + perturbation (en pointillé : cas où $u_x < 0$). (Values in the yOz plane of u_x component. Main flow + perturbation (dotted line: case where $u_x < 0$)). (e) Isovaleurs de la composante u_x dans le plan yOz . Perturbation. (Values in the yOz plane of u_x component. Perturbation).

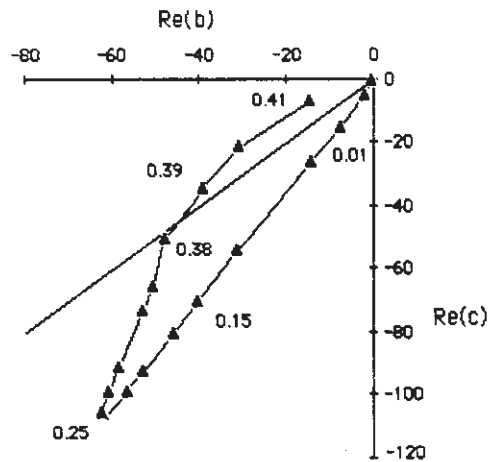


Fig. 9

Fig. 9

où a, b, c sont des valeurs complexes. La variable z_0 vérifie l'équation

$$(4.40) \quad \frac{dz_0}{dt} = d(z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2) + O(|z_1|^4 + |z_2|^4 + \mu(|z_1|^2 + |z_2|^2)).$$

Le calcul des coefficients a, b, c s'effectuera de la même façon qu'au paragraphe 4.5, et sera obtenue à partir des mêmes formules, la seule différence importante sera la prise en compte du terme dz_0/dt (i.e. de la projection dans \mathcal{D}').

On obtient à l'ordre μz_1 :

$$(4.63) \quad \Phi_{11000} = \Phi_{11000}(z) e^{i(hx+ky)}$$

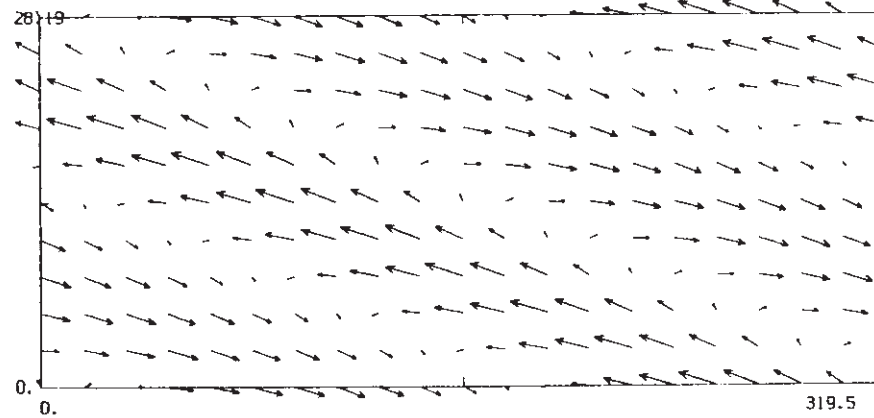
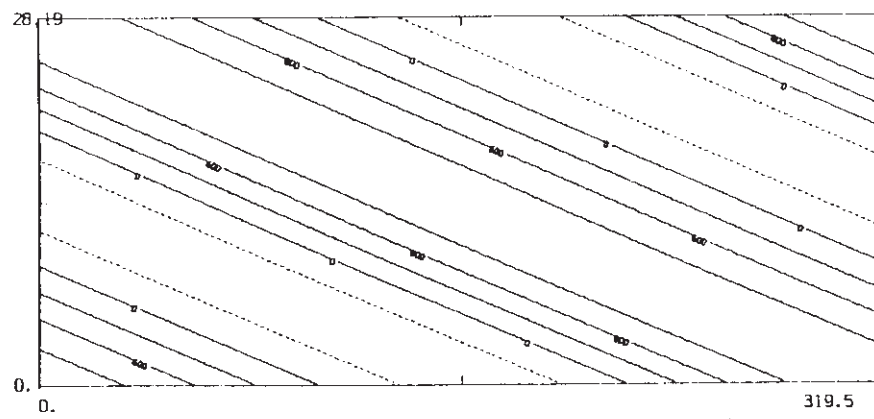
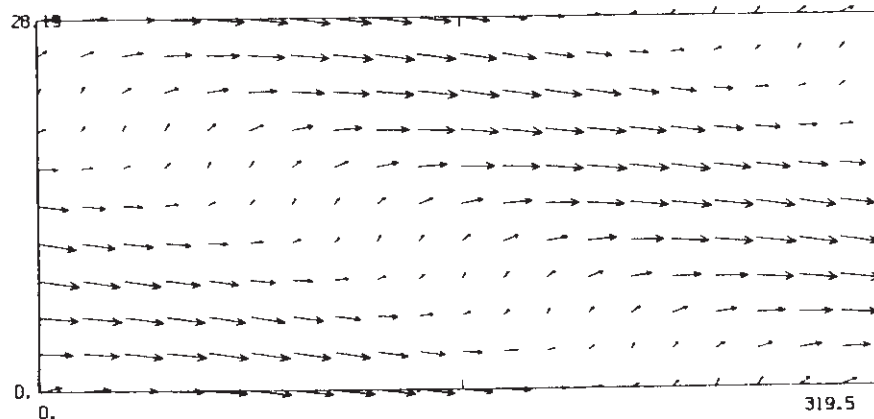
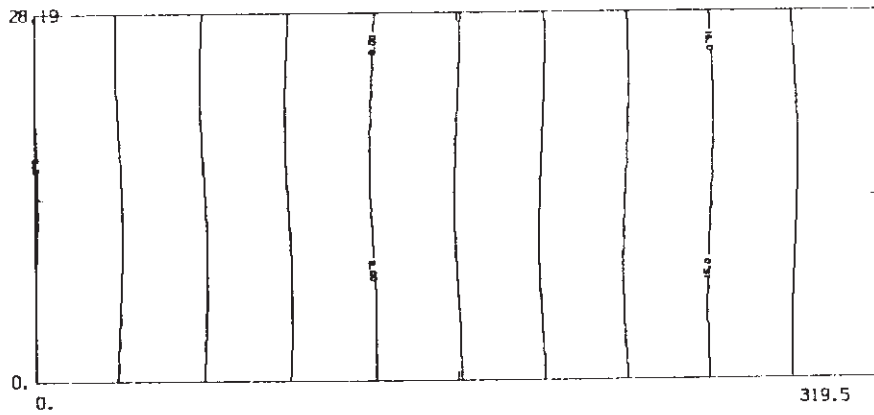
avec

$$(4.64) \quad (\mathbf{L}_{h,k} - i\omega_0) \Phi_{11000} = \mathbf{L}_{h,k}^1 \mathbf{U}_1 + a \mathbf{U}_1.$$

A l'ordre 2 en $z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2$.

$$\Phi_{0qrmn} = \Phi_{0qrmn}(z) e^{i((q-r+m-n)hx + (q-r-m+n)ky)}$$

$$(4.65) \quad \begin{aligned} (\mathbf{L}_{2h,2k} - 2i\omega_0) \Phi_{02000} &= -\mathbf{M}_{h,k,h,k}(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_1) \\ \mathbf{L}_{0,0} \Phi_{01100} &= -2\mathbf{M}_{h,k,-h,-k}(\mathbf{U}_1, \bar{\mathbf{U}}_1) + d\mathbf{U}_0 \\ (\mathbf{L}_{2h,0} - 2i\omega_0) \Phi_{01010} &= -2\mathbf{M}_{h,k,h,-k}(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) \\ \mathbf{L}_{0,2k} \Phi_{01001} &= -2\mathbf{M}_{h,k,-h,k}(\mathbf{U}_1, \bar{\mathbf{U}}_2) \\ \Phi_{00020} &= \mathbf{S} \Phi_{02000}, & \Phi_{00011} &= \mathbf{S} \Phi_{01100}, & \Phi_{00200} &= \bar{\Phi}_{02000} \\ \Phi_{00110} &= \bar{\Phi}_{01001}, & \Phi_{00101} &= \bar{\Phi}_{01010}, & \Phi_{00002} &= \bar{\Phi}_{00020}. \end{aligned}$$



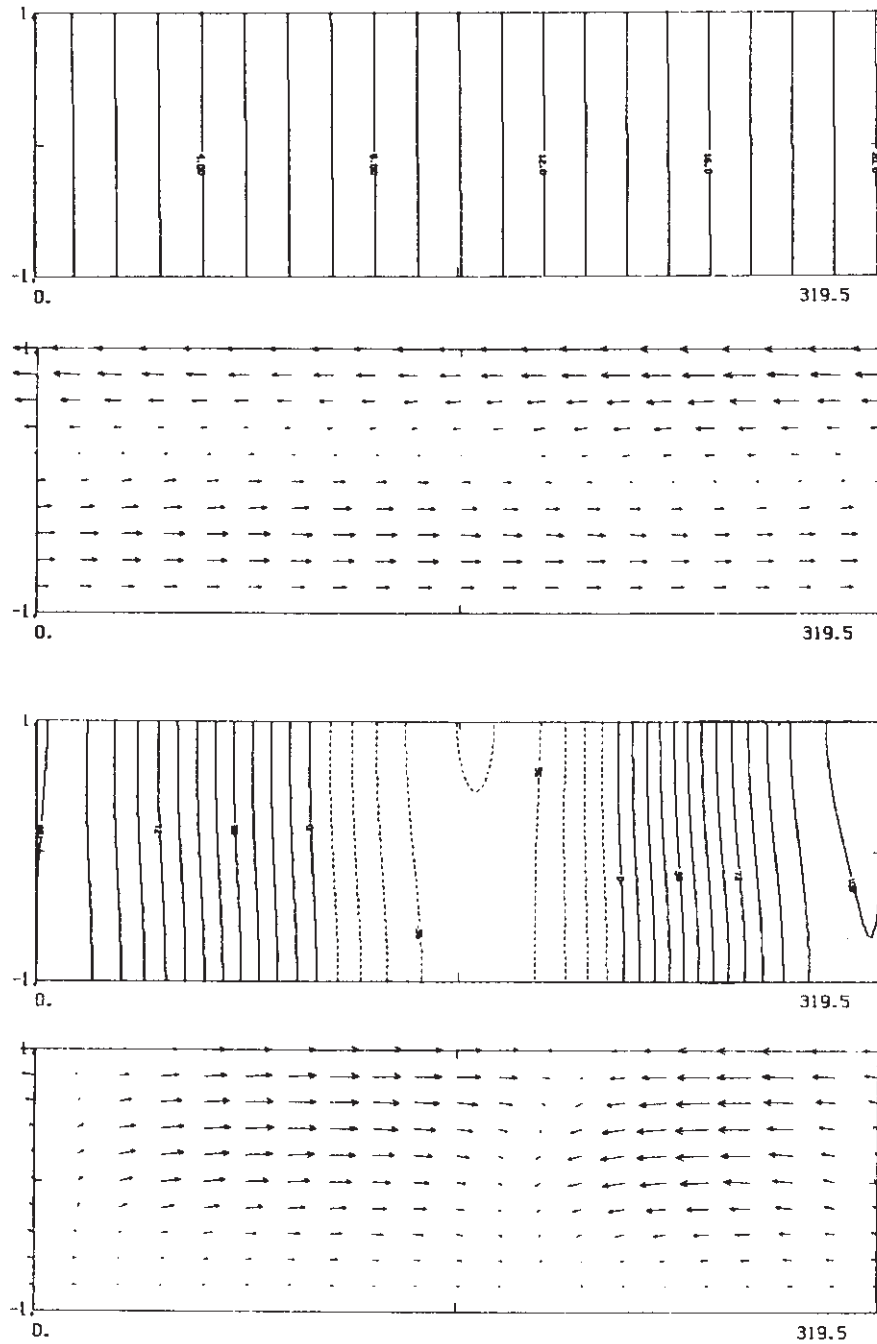


Fig. 10. — $Pr=0,03$, $Gr=3\ 200$, $\varepsilon=0,038$, $k=0,02$, $h=0,223$, $\omega=3,88$. (a) Isothermes et champs des vitesses dans le plan xOy , $z=0$ et $t=0$. [(a) *Isothermal lines and stream vectors in the plane xOy , $z=0$ and $t=0$*]. (a 1) Solution finale. [(a 1) *Final solution*]. (a 2) Perturbation. [(a 2) *Perturbation*]. (b) Isothermes et champs des vitesses dans le plan xOz , $y=0$ et $t=0$. (b) *Isothermal lines and stream vectors in the plane xOz , $y=0$ and $t=0$* . (b 1) Solution finale. (b 1) *Final solution*. (b 2) Perturbation. (b 2) *Perturbation*.

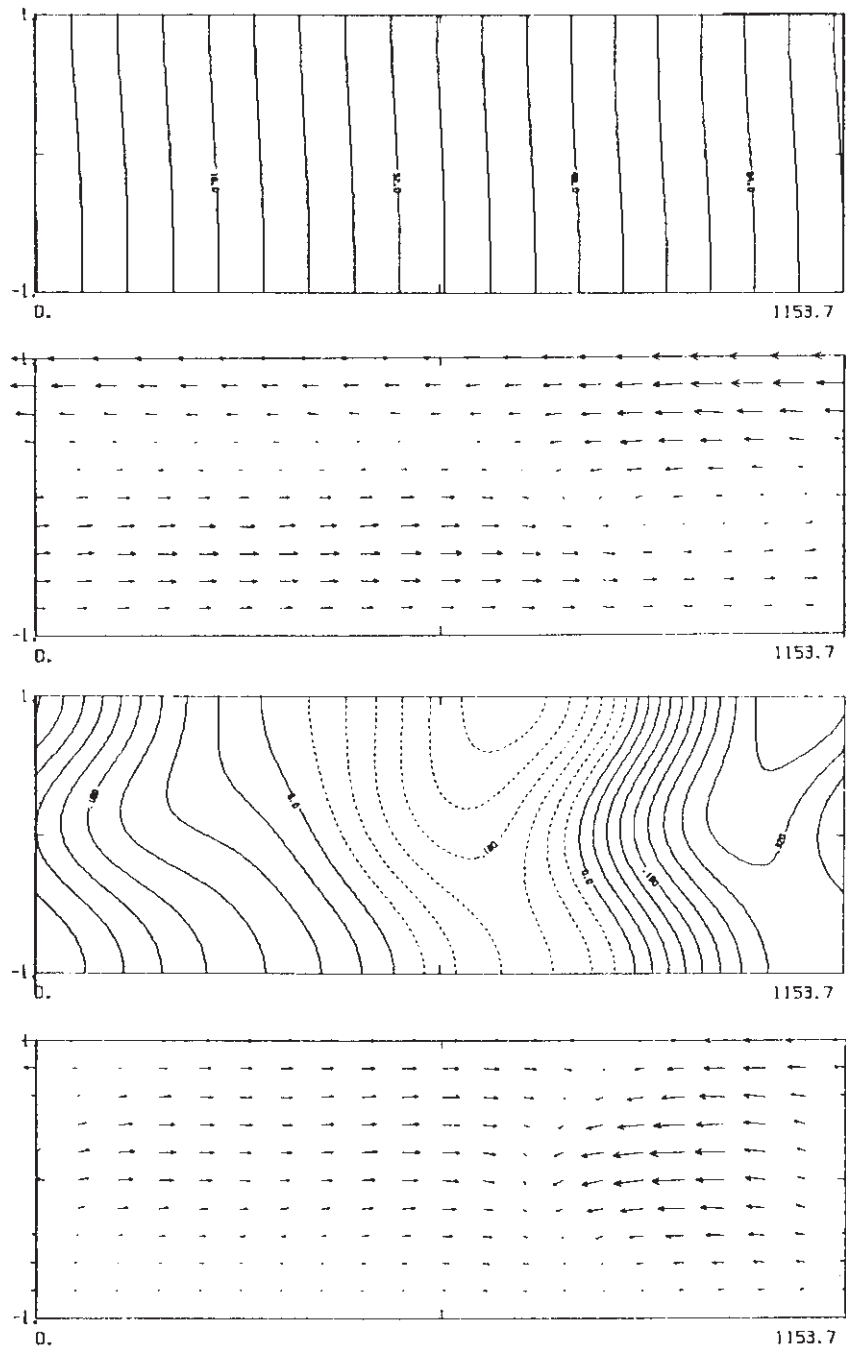


Fig. 11. — $Pr=0,4$, $GR=6000$, $\varepsilon=0,057$, $k=0,005$, $h=0,185$, $\omega=5,73$. (a) Isothermes et champs des vitesses dans le plan xOy , $z=0$ et $t=0$. [(a) Isothermal lines and stream vectors in the plane xOy , $z=0$ and $t=0$]. (a1) Solution finale. (a1) Final Solution. (a2) Perturbation. (a2) Perturbation. (b) Isothermes et champs des vitesses dans le plan xOz , $y=0$ et $t=0$. (b) Isothermal lines and stream vectors in the plane xOz , $y=0$ and $t=0$. (b1) Solution finale. (b1) Final solution. (b2) Perturbation. (b2) Perturbation.

TABEAU IV
Cas R-L.
R F case.

Pr	$a \cdot 10^{14} \ddagger$	Re(b)	Im(b)	Re(c)	Im(c)	d
0,001	0,88 + i 1,88	- 0,13	0,39	- 0,56	3,46	2,22
0,005	1,96 + i 4,14	0,78	0,14	- 2,73	1,76	4,93
0,01	2,68 + i 5,76	- 1,81	0,17	- 5,36	3,60	6,92
0,03	4,30 + i 9,40	- 7,38	- 0,29	- 15,66	11,14	11,67
0,1	6,38 + i 14,66	- 30,93	1,96	- 54,54	39,34	19,88
0,15	6,86 + i 16,35	- 45,63	- 0,21	- 80,53	63,22	23,19
0,2	6,93 + i 17,19	56,39	4,38	- 99,22	89,08	25,25
0,25	6,66 + i 17,29	- 61,87	11,53	- 106,62	112,32	26,03
0,3	6,02 + i 16,50	- 60,88	20,67	- 99,39	124,73	25,11
0,35	4,83 + i 14,21	52,76	29,85	- 73,50	111,23	21,38
0,4	2,43 + i 7,84	- 30,74	19,95	- 21,91	40,29	11,16
0,41	1,39 + i 4,60	- 14,33	7,42	7,52	14,35	6,42

Cet écoulement est invariant par la symétrie S, et ne dépend que des variables $hx + \omega t$, y et z . Il est stable si et seulement si $\text{Re}(b+c) < 0$ et $\text{Re}(b-c) < 0$.

Dans le tableau IV on donne les valeurs numériques de a , b , c et d en fonction du nombre de Prandtl, et sur la figure 9 on a tracé l'évolution de $\text{Re}(b)$ et $\text{Re}(c)$ quand on modifie le nombre de Prandtl.

Les conditions aux limites adiabatiques ont pour conséquence la non constance de la « moyenne de la température ». Notre modèle montre une évolution $z_0(t)$, celle-ci est très lente relativement aux autres phénomènes physiques. Cela revient à considérer une échelle de temps différente. Le modèle est relevant dans ce cas pour des temps pas trop longs.

La figure 9 permet de dire que les deux types de solutions peuvent apparaître. On a tracé sur la figure 10 une solution de type (a) pour $\text{Pr}=0,03$, et sur la figure 11 une solution de type (b) pour $\text{Pr}=0,4$.

Cette étude a été développée avec le soutien financier de la DRET. Les moyens de calcul utilisés ont été attribués par le Conseil Scientifiques du Centre de Calcul Vectoriel pour la Recherche.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. T. J. HURLE, E. JAKEMAN et C. P. JOHNSON, Convective Temperature Oscillations in Molten Gallium (*J. Fluid Mech.*, vol. 64, part 3, 1974, p. 565-576).
 [2] J. HART, Stability of Thin Non-Rotating Hadley Circulation (*J. Atmos. Sc.*, vol. 29, 1972, p. 687-697.)
 [3] D. E. CORMARK et L. G. LEAL, Natural Convection in a Shallow Cavity with Differentially Heated end Walls (*J. Fluid Mech.*, vol. 65, part 2, 1974, p. 209-229).
 [4] A. E. GILL, A Theory of Thermal Oscillations in Liquid Metals (*J. Fluid Mech.*, vol. 64, part 3, 1974, p. 577-588).

- [5] J. HART, *A Note on Stability of Low Prandtl Number Hadley Circulations* (*J. Fluid Mech.*, vol. 132, 1983, p. 271-281).
- [6] Y. DEMAY et G. IOOSS, *Calcul des solutions bifurquées pour le problème de Couette-Taylor avec les deux cylindres en rotation* (*J. Mecan. théorique et appliquée*, numéro spécial, 1984, p. 193-216).
- [7] P. CHOSSAT et G. IOOSS, *Primary and secondary bifurcations in the Couette-Taylor problem* (*Japan J. Applied Math.*, 2, n° 1, 1985, p. 37-68).
- [8] G. IOOSS, *Théorie non linéaire de la stabilité des écoulements laminaires dans le cas de l'échange de stabilité* (*A.R.M.A.*, vol. 40, 1971, p. 166-208).
- [9] STEVEN A. ORSZAG, *Accurate solution of Orr-Sommerfeld stability equation* (*J.F.M.*, vol. 50, part 4, 1971, p. 689-703).
- [10] B. BRENIER, B. ROUX et P. BONTOUX, *Comparaison des méthodes Tau-Chebyshev et Galerkin dans l'étude de stabilité des mouvements de convection naturelle. Problème des valeurs propres parasites* (*J. Mécan. théorique et appliquée*, 1986) (en cours d'impression).
- [11] B. ROUX, P. BONTOUX et D. HENRY, *Numerical and Theoretical Study of Different flow Regimes Occuring in Horizontal Fluid Layers Differentially Heated* (*Lecture Note in Physics*, Springer-Verlag, 1985, p. 202-217).
- [12] W. F. LANGFORD et G. IOOSS, *Interactions of Hopf and Pitchfork bifurcations. Bifurcation Problems and their Numerical Solution*, MITTELMANN et H. WEBER ed., Dortmund, 1980, p. 103-134.

(Manuscrit reçu le 17 février 1986,
accepté le 30 octobre 1986.)