DEA Physique et Génie des Matériaux

Mastère Matériaux et Mise en Forme

Fiches TD Elément Finis

P. Laure (Patrice.Laure@inln.cnrs.fr)
Institut Non Linéaire de Nice

Séance 0 : un peu de mathématique

Ex 1 *Calcul de la solution d'une edo*

On considére l'équation sur l'intervalle $[0,1]$:

$$\begin{aligned} -u'' &= 1 \\ u(0) = u'(1) &= 0 \end{aligned}$$

On va calculer la solution de cette équation sur $n = 5$ points équidistants.
1) Trouver la solution exacte du problème.
2) Résoudre en utilisant les différences finies et l'approximation

$$u'' = \frac{u_{i+1} - 2\ u_i + u_{i-1}}{\Delta_x^2} \qquad \text{avec} \qquad \Delta_x = 1/(n-1).$$

- Trouver une approximation de la dérivée première de u en $x = 1$ qui soit aussi d'ordre 2.
- Donner le système qui permet de calculer u sur les x_i , $1 \leq i \leq 5$.

3) Résoudre en utilisant les éléments finis d'ordre $\mathbf{P_1}$.
- Donner la base des fonctions tests.
- Ecrire la matrice qui permet d'obtenir la valeur de u sur les 5 points.

Ex 2 *Les polynômes de Lagrange*

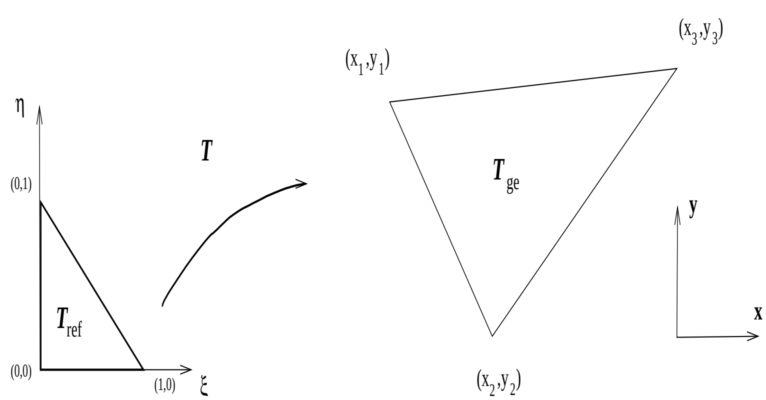

Fig. 1 – Schéma montrant $\mathbf{T}_{\text{ref}}$, $\mathbf{T}_{\text{ge}}$ et la transformation $\mathbf{T}$ permettant de passer de l'un à l'autre.

1) On considère un triangle de référence, $\mathbf{T}_{\text{ref}}$, formé par les trois points $A_1 = (0,0)$, $A_2 = (1,0)$ et $A_3 = (0,1)$ (voir Figure 1).

(a) Calculer l'aire de ce triangle.
(b) Trouver les 3 fonctions affines L_i tel que $L_i(A_j) = \delta_{ij}$. C'est les fonctions d'interpolation de Lagrange d'ordre 1.
2) Sur le triangle $\mathbf{T}_{\text{ref}}$, calculer $\int_{\mathbf{T}_{\text{ref}}} L_i\ dx\ dy$.

3) On considère un triangle, T_{ge} formé par les trois points $B_1 = (x_1, y_1)$, $B_2 = (x_2, y_2)$ et $B_3 = (x_3, y_3)$.
(a) Trouvez une transformation linéaire T qui permet de passer du triangle de référence à ce triangle (on utilise les fonctions L_i de la question précédente).
(b) Calculez l'aire de ce nouveau triangle en utilisant ce changement de coordonnée.

4) Soit une fonction $U(x, y)$, on approche sur $\mathbf{T}_{\text{ref}}$ cette fonction par la fonction $\hat{U}(x, y)$ définie de la façon suivante :

$$\hat{U} = a + bx + cy \quad \text{et} \quad \hat{U}(A_i) = U(A_i) = U_i$$

(a) Montrer que $\hat{U} = U_1 L_1(x, y) + U_2 L_2(x, y) + U_3 L_3(x, y)$ (Les fonctions L_i ont été trouvées en **1)**).
(b) Calculer $\int_{\mathbf{T}_{\text{ref}}} \hat{U}(x, y)\, dx\, dy$.
(c) En déduire l'intégrale de $\hat{U}$ sur le triangle $\mathbf{T}_{\text{ge}}$ (maintenant $\hat{U}(B_i) = U(B_i) = U_i$). En remarquant que cette formule donne une approximation de l'intégrale de $U(x, y)$ sur le triangle $\mathbf{T}_{\text{ge}}$, comment est approché $U(x, y)$ sur cette surface.

5) On considére un carré $0 \leq x, y \leq 1$.
(a) Découper ce carré en 4 triangles égaux.
(b) Soit $U(x, y) = x + y$, calculer l'intégrale de $U(x, y)$ sur le carré, en utilisant la formule d'approximation de la question **4)** sur les 4 triangles.
(c) Comparer avec la valeur réelle de l'intégrale de U sur le carré. Expliquer le résultat.

Séance 1 : Initiation à Scilab

Ex 1 *Manipulation sur les vecteurs*
Ecrire (sans utiliser de boucle) les vecteurs suivants :
1) Nombres de 1 à 3 par pas de 0.1 .
2) Nombres de 3 à 1 par pas de -0.1 .

3) Les carrés des 10 premiers entiers.
4) Nombres de la forme $(-1)^n n^2$ pour $n = 1, 10$.

5) Vecteur formé de 10 "0" suivis de 10 "1".

Ex 2 *Manipulation sur les Matrices*

1) Ecrire (sans utiliser de boucle) la matrice d'ordre 6 contenant les entiers de 1 à 36, rangés par lignes.
2) Ecrire (avec ou sans boucle) la matrice d'ordre n suivante :

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ex 3 *Exemple de tracé*

Tracer la fonction $f(x) = \sin(x) + x$ entre 0 et 4 π.

Ex 4 *Ecriture d'une fonction*
Ecrire la fonction `alterne2_colonnes` qui prend en entrée deux matrices quelconques A et B de même dimensions. Elle retourne la matrice formée en alternant les colonnes de A et B.
On écrit le programme dans un fichier `alterne2_colonnes.sci` et on compile la fonction sous scilab avec la commande `exec(''alterne2_colonnes.sci'')`.

Ex 5 *Calcul de la solution d'une edo*

On considére l'équation

$$-u'' + u = 1$$
$$u(0) = u(1) = 0$$

1) Vérifier $u(x) = 1 - \frac{e^x + e^{1-x}}{1+e}$ est la solution exacte du problème.
2) Résoudre numériquement en utilisant n points de discrétisation et l'approximation

$$u'' = \frac{u_{i+1} - 2\ u_i + u_{i-1}}{\Delta_x^2} \quad \text{avec} \quad \Delta_x = 1/(n-1).$$

Ecrire le problème sous forme matricielle $AU = F$ où $U = (u_i)_{i=1,n}$ est le vecteur correspondant aux valeurs de u aux points de discrétisation.
Ecrire un programme en scilab qui résoud ce problème. Comparer la solution calculée et la solution exacte. Etudier l'erreur quand on change n.

Séance 2 : Initiation aux éléments finis 1D

Pour pouvoir faire ce TD facilement, il faut prendre à l'adresse

http ://www.inln.cnrs.fr/∼laure/EF/TD1/Seance2/index.html

les fichiers suivant :
– `P1.sci` et `P2.sci` ; fonctions qui donnent les fonctions de Lagrange pour l'élément $\mathbf{P_1}$ et $\mathbf{P_2}$.
– `gauss.sci` ; une fonction qui donne les points de Gauss pour l'intégration numérique.

Ex 1 *Eléments Finis Unidimensionnels*
On considère l'équation

$$-u'' + u = 1$$
$$u(0) = u(1) = 0$$

1) Ecrire la formulation faible de cette équation.

2) On prend une interpolation $\mathbf{P_1}$, c'est à dire sur l'intervalle de référence on utilise les polynômes de Lagrange $L_1(\xi) = (1-\xi)/2$ et $L_2(\xi) = (1+\xi)/2$ (cf. le programme `P1.sci`).
On prend `Nelt` éléments : écrire le programme qui calcule le vecteur `COOR` et la matrice `CONNEC`.
3) Ecrire le système élémentaire à résoudre sur chaque élément. Ecrire le programme correspondant. Pour l'intégration numérique, on utilisera les points de Gauss (cf. le programme `gauss.sci`).

4) Ecrire le programme qui fait l'assemblage.

5) Ecrire le programme qui résoud le Problème. Ne pas oublier d'imposer les conditions aux limites $u(0) = u(1) = 0$. Regarder l'évolution de l'erreur en fonction du pas de discrétisation.

6) Modifier le programme écrit pour utiliser des éléments $\mathbf{P_2}$ (programme `P2.sci`). Regarder l'évolution de l'erreur en fonction du pas de discrétisation.

7) Modifier le programme pour les conditions aux limites $u(0) = 0$ et $\partial_x u(1) = 0$.

Séance 3 : Initiation aux éléments finis 2D

Pour pouvoir faire ce TD facilement, il faut prendre à l'adresse

http ://www.inln.cnrs.fr/~laure/EF/TD1/Seance3/index.html

les fichiers suivant :
- `Q1.sci, Q2.sci, P1.sci`; fonctions qui donne les fonctions de Lagrange pour les éléments $\mathbf{Q_1}$, $\mathbf{Q_2}$ et $\mathbf{P_1}$.
- `gauss.sci`; une fonction qui donne les points de Gauss pour l'intégration numérique.
- `maillage_2D_?.sci`; des fonctions qui donnent le maillage d'un carré par des quadrangles et des triangles.
- `cal_indice.sci, interpol.sci, trace_maillage_2D.sci, trace_u_2D.sci`; des fonctions qui permettent de tracer le maillage et la solution u.

On va utiliser le fichier `seance3.sci` qui devrait ressembler au programme écrit à la deuxième séance. Les instructions d'assemblage ont été légèrement modifier pour tenir compte de la structure creuse de la matrice globale. Le travail consistera à ajouter les instructions permettant de calculer le système élémentaire pour un problème bidimensionnel.

Ex 1 *Ecoulements de Poiseuille*

On veut résoudre

$$-\Delta u = 1 \quad \text{sur un carré} \quad [0,1]\times[0,1]$$

avec les conditions aux limites de Dirichlet

$$u(0,y) \;=\; u(1,y) \;=\; u(x,0) \;=\; u(x,1) \;=\; 0 \tag{1}$$

en utilisant des éléments $\mathbf{Q_2}$ (programme `Q2.sci`).

1) Ecrire la forme variationnelle de l'équation et le système élémentaire à résoudre sur chaque élément.

2) On utilise des quadrilatères comme éléments (cf. `maillage_2D.sci` et `trace_maillage_2D.sci` pour tracer ce maillage). Détailler le calcul de la matrice jacobienne qui correspond à la transformation linéaire du quadrilatère de référence vers un quadrilatère quelconque. Ecrire les instructions correspondantes.

3) La matrice `CONNEC` et le vecteur `COOR` sont donnés par la fonction `maillage_2D.sci`. La matrice `ADRESS` et le vecteur `NUMER` sont calculés pour les conditions aux limites (1) dans le fichier `seance3.sci`. Ecrire les instructions qui permettent de calculer le système élémentaire (les matrices `A_el` et `F_el`) en complétant le fichier `seance3.sci`.

4) Ecrire une fonction scilab qui calcule le débit de la solution u (c'est à dire $\int_0^1 \int_0^1 u\, dx\, dy$)

5) Modifier le calcul de `NUMER` pour avoir des conditions de Neumann pour $x = 0$ et $x = 1$. Vérifier que la solution trouvée ne dépend pas de x et est égal à $u(y) = y(1-y)/2$.

Ex 2 *Solution analytique*

Pour tester les différents maillages, on résoud un problème pour lequel on connaît une solution analytique. On considère l'équation sur $\Omega = [0,1] \times [0,1]$

$$-\Delta u \ + \ 3u \ = \ 0$$

et on peut montrer que $u(x,y) = e^{2x} \sin(y)$ est une solution si on ajuste correctement les conditions aux limites sur les bords.

1) Ecrire la formulation faible de ce problème.

2) En adaptant les programmes écrits à l'exercice précédents et les différentes fonctions `maillage_2D_?.sci` tester les élements $\mathbf{Q_1}$, $\mathbf{Q_2}$ et $\mathbf{P_1}$. On peut comparer l'erreur entre la solution calculée et la solution analytique.