Fourier Series

Ex 1 Séries de Fourier de la fonction $f(x) = x$ sur]-1,1] et de période 2.

(a) Tracer le graphe sur [-3,3] : on utilise $f(x+2) = f(x)$ pour étendre f à l'intervalle [-3,3]

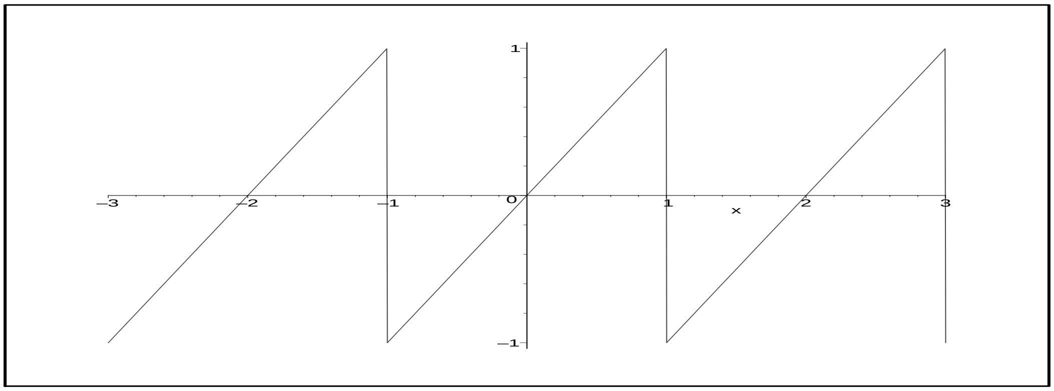

Figure 1: Graphe de f sur [-3,3].

(b) Coefficients de la série de Fourier $f(x) = a_0 + \Sigma_{k=1}^{\infty} a_k \ \cos(k\ \pi\ x) + \Sigma_{k=1}^{\infty} b_k \ \sin(k\ \pi\ x)$:

$$a_k = 0 \qquad ; \qquad b_k = 2\,\frac{(-1)^{(1+k)}}{k\,\pi}$$

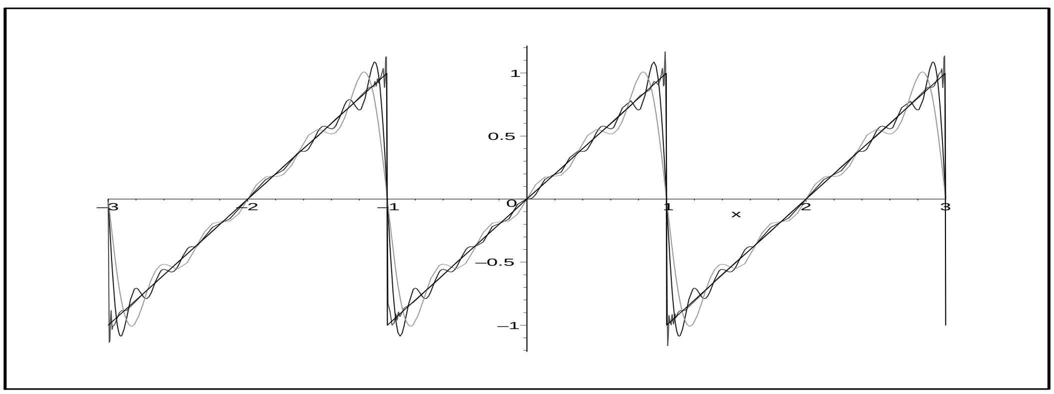

Figure 2: Série de Fourier pour N = 5, 10, 100. Remarquez le phénomène de Gibbs aux points de discontinuité.

Ex 2 Séries de Fourier de la fonction $f(x) = |x|$ sur]-1,1] et de période 2.

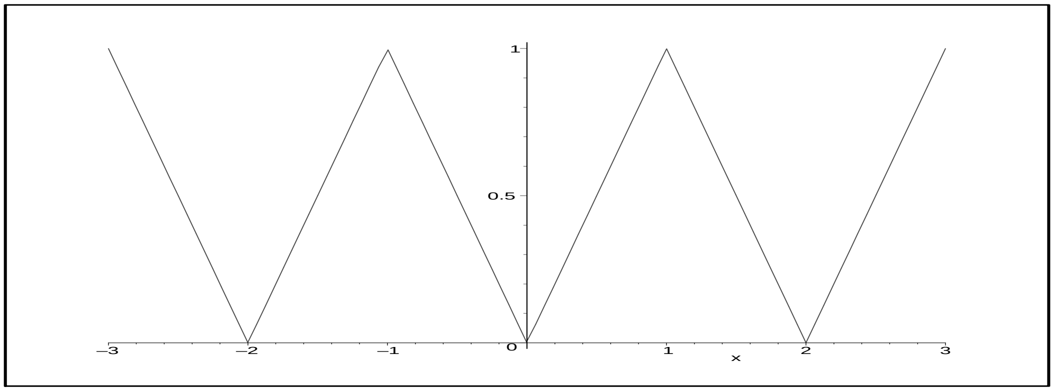

Figure 3: Graphe de f sur [-3,3].

Coefficients de la série de Fourier :

$$a_0 = \frac{1}{2} \quad ; \quad a_k = \frac{(-1)^k - 1}{k^2 \pi^2} \quad ; \quad b_k = 0$$

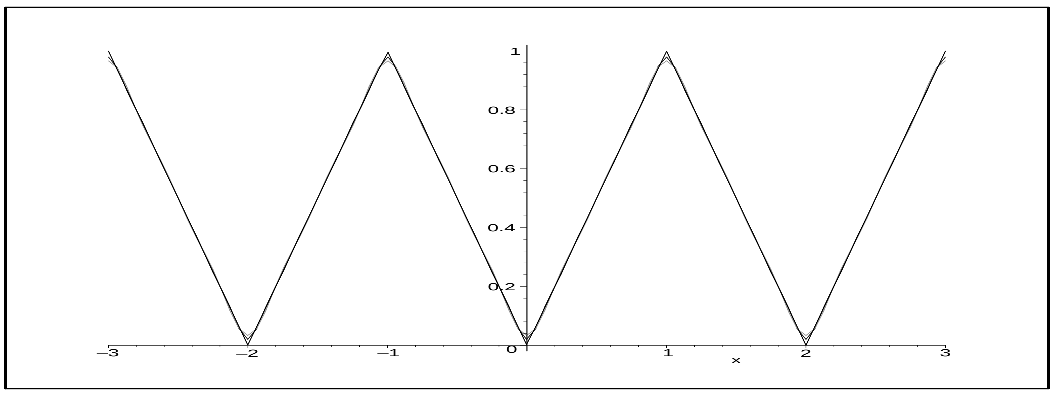

Figure 4: Série de Fourier pour N = 5, 10.

Ex 3 Séries de Fourier d'une fonction impaire et de période 2 L

- f impaire alors $f(-x) = -f(x)$.
- par définition $a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \; \cos(n \; \frac{\pi}{L} \; x) \; dx$.
- on coupe l'intégrale en deux ($\int_{-L}^{L} = \int_{-L}^{0} + \int_0^L$)

le premier terme vérifie

$$\int_{-L}^{0} f(x) \cos(n\frac{\pi}{L} \; x) \; dx = \int_{L}^{0} f(s) \cos(n\frac{\pi}{L} \; s) \; ds = - \int_{0}^{L} f(s) \cos(n\frac{\pi}{L} \; s) \; ds$$

par le changement de variable $s = -x$ ($dx = -ds$, $\cos(-x) = \cos(x)$, ...).
- ce terme est l'opposé du deuxième terme. Par conséquent $a_n = 0$ pour tout n.

On fait le même type de calcul pour b_n quand f est paire ($f(-x) = f(x)$).

Ex 4

g est impaire

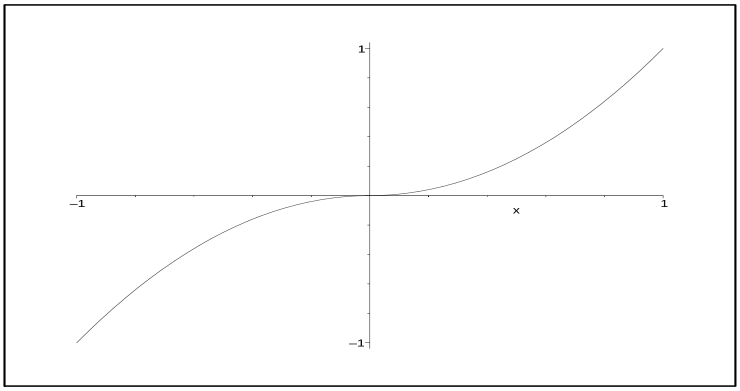

Figure 5: Graphe de g sur [-1,1].

Coefficients de la série de Fourier

$$a_k = 0 \qquad ; \qquad b_k = -2\,\frac{(-1)^k}{k\pi} + 4\,\frac{(-1)^k - 1}{k^3\pi^3}$$

Ex 5 $f(x) = x(1-x)$ sur [0,1] et f est paire $\Rightarrow f(x) = |x|(1-|x|)$ sur [-1.1].

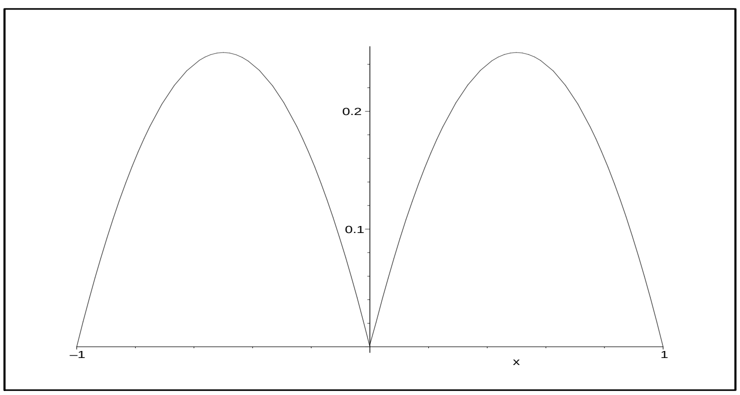

Figure 6: Graphe de f sur [-1,1].

Coefficients de la série de Fourier

$$a_0 = \frac{1}{6} \quad ; \quad a_k = 2\int_0^1 f(x)\ \cos(k\pi x)dx = -2\frac{(-1)^k + 1}{k^2\ \pi^2} \qquad \text{et} \qquad b_k = 0$$

On trouve les formules suivantes ;

$$f(0) = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$f(1/2) = 1/4 \quad \rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(k+1)}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Ex 6
Montrez que $(C_i, C_j) = (S_i, S_j) = \delta_{ij}$ et $(C_i, S_j) = 0$ pour tout i, j :
on utilise les fameuses formules

$$\cos(p)\cos(q) = [\cos(p+q) + \cos(p-q)]/2$$
$$\sin(p)\sin(q) = [\cos(p+q) - \cos(p-q)]/2$$
$$\sin(p)\cos(q) = [\sin(p+q) + \sin(p-q)]/2$$

Par exemple :

$$\int_{-L}^{L} \cos(i\pi x/L)\sin(j\pi x/L)dx = \int_{-L}^{L} \sin((i+j)\pi x/L)dx + \int_{-L}^{L} \sin((i-j)\pi x/L)dx$$
$$= \left[-\frac{L}{\pi}\cos((i+j)\pi x/L)\right]_{-L}^{L} + \left[-\frac{L}{\pi}\cos((i-j)\pi x/L)\right]_{-L}^{L} = 0$$

....

Les fonctions C_n et S_n forment une base othonormée pour le produit scalaire

$$(f,g) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)g(x)\ dx$$

On peut montrer qu'une somme de la forme,$S = \sum_{n=0}^{N} a_n C_n + \sum_{n=1}^{N} b_n S_n$ réalise la meilleure approximation d'une fonction f si $a_n = (f, C_n)$ et $b_n = (f, S_n)$. On doit chercher à minimiser $||f - S||$, où la norme $||.||$ est définie à partir du produit scalaire. On sait que ce minimum est atteind pour S qui est la projection de f sur le sous espace engendré par les fonctions $\sin(n\pi/Lx)$ et $\cos(n\pi/Lx)$.

Ex 7 $f(x) = \text{Dirac}(x) = \delta(x)$
la fonction de Dirac vérifie

$$\delta(x) = 0 \ \text{ si } \ x \neq 0 \quad \text{et} \quad \int \delta(x)\ h(x)\ dx = h(0)$$

Par conséquent on a

$$a_0 = \frac{1}{2} \ \ ; \ \ a_k = 1 \text{ et } b_k = 0$$

et

$$\delta(x) = \frac{1}{2} + \sum \cos(k\pi x)$$

et

$$\delta(x-t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \cos(k\pi(x-t)) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [\cos(k\pi x)\cos(k\pi t) + \sin(k\pi x)\sin(k\pi t)]$$