Semaine 11 : applications des séries de Fourier

Ex 1 *Equation de la chaleur*
On considère le problème aux conditions aux limites (C.L.) pour l'équation de la chaleur (u représente la température) :

$$u_t = \kappa \, u_{xx}, \quad 0 < x < 1 \text{ and } t > 0,$$

(a) on considère des conditions aux limites conductrices (c'est à dire on fixe la température en $x = 0$ et $x = 1$).

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

Montrez que $u_n(x,t) = \exp(\alpha_n \; t)\sin(n\pi x)$ est une solution du problème aux conditions aux limites. Trouvez la constante α_n.

(b) on considère des conditions aux limites adiabatiques (la chaleur ne sort pas) :

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0$$

Montrez que $u_n(x,t) = \exp(\alpha_n \; t)\cos(n\pi x)$ est maintenant une solution du problème.

(c) on impose un profil de température initial $u(x,0) = f(x)$. Déterminez les coefficients a_n dans le cas conducteur et adiabatique, en remarquant qu'une solution générale du problème peut s'écrire sous la forme $u(x,t) = \sum a_n \; u_n(x,t)$.

(d) Etudiez la solution pour les C.L. conductrices quand $f(x) = \sin(\pi x)$. Donnez la limite de $u(x,t)$ quand $t \to \infty$

(e) Etudiez la solution pour les C.L. adiabatiques quand,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < 1/2 \\ 1 - x & \text{si } 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

Que peut-t-on dire de la fonction $g(x) = u(x,t_0)$ pour $t_0 > t$?
Calculez la limite de $u(x,t)$ quand $t \to \infty$?

Ex 2 *Oscillateur forcé*
On veut résoudre l'équation :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(t) + 2 \; y(t) = r(t)$$

Cette équation peut représenter le mouvement d'un solide de masse 1 placé à l'extrémité d'un ressort de raideur 2 et soumis à un forçage $r(t)$.
(a) Trouvez la solution générale de l'équation sans second membre.

(b) On pose que $r(t) = |x|$ sur $[-\pi, \pi]$ et est de période 2π (cf. Ex 2 sur les séries de Fourier). Cherchez une solution particulière de l'équation de la forme $y(t) = \sum A_k \cos(k \; t)$.

(c) trouvez la solution pour les conditions initiales $y(0) = 1$ et $\partial_t y(0) = 0$. Cette solution est-elle périodique ?