

Semaine 12 : Orthogonalité

Ex 1 *Mise en train*

On considère les vecteurs :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- 1) Calculer $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, $\|\mathbf{u}\|$ et de $\|\mathbf{v}\|$.
- 2) Calculer la distance entre les points extrémités de \mathbf{u} et de \mathbf{v} .
- 3) Trouver une base de l'espace perpendiculaire au plan engendré par \mathbf{u} et \mathbf{v} .

Ex 2 *Alternative de Fredholm*

Quels que soient A et b , un seul des deux systèmes suivant a une solution :

$$(1) \quad Ax = b \qquad (2) \quad A^T y = 0 \quad \text{et} \quad y^T b \neq 0$$

Autrement dit, soit b est dans l'espace engendré par les vecteurs colonnes de $A = \text{Im}(A)$ soit il existe un vecteur y dans $\text{Ker}(A^T)$ tel que $y^T b \neq 0$.

- 1) Montrez qu'il y a une contradiction à ce que (1) et (2) aient à la fois une solution.
- 2) Soit le système $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ h \end{pmatrix}.$$

Trouvez la valeur de h pour laquelle ce système admet une solution.

Ex 3 *Pour le fun*

Montrez que (i) et (ii) sont équivalents

$$(i) \quad \text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$$

$$(ii) \quad \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{O\}$$

Ex 4 *Projection sur une droite*

- 1) Trouvez la matrice P_1 qui projette sur la droite engendré par le vecteur $a = (1, 3)^T$ et aussi celle de la projection P_2 associée la droite perpendiculaire à a .
- 2) calculez $P_1 + P_2$ et $P_1 P_2$ et expliquez les résultats.

Ex 5 *Solution qui minimise les moindres carrés*

On veut trouver le plan, $y = C + D t + E z$, qui approxime le mieux les quatres points

$$y = 3 \text{ à } t = 1, z = 1 \qquad y = 6 \text{ à } t = 0, z = 3$$

$$y = 5 \text{ à } t = 2, z = 1 \qquad y = 0 \text{ à } t = 0, z = 0.$$

- 1) Trouvez le système de 4 équations à 3 inconnues qui fait passer un plan à travers ces points (si un tel plan existe).
- 2) Trouvez le système de trois équations à trois inconnues qui donnent la meilleures solution au sens des moindres carrés (c'est à dire la solution x qui minimise $\|Ax - b\|$).