Semaine 14 : Orthogonalité (suite)

Ex 1 *Révision 1*
Soit V le sous espace engendré par

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1) Trouvez une matrice A qui a V comme image.
2) Trouvez une matrice B qui a V comme noyau.

Ex 2 *Révision 2*
Soient les vecteurs

$$u = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1) Montrez que (u, v, w) est une base orthogonale de $\mathbf{R}^3$.
2) Exprimez le vecteur

$$x = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

comme combinaison linéaire de u, v et w.

Ex 3 *Révision 3*
Ecrire la solution générale de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Remarquez que c'est la somme d'une solution particulière de $Ax = b$ et de la solution générale de $Ax = 0$.

Ex 4 *Orthogonalisation de Gram-Schmidt*
1) Soient deux vecteurs indépendants a et b, trouvez une base orthonormale (q_1, q_2) tel que q_1 soit colinéaire à a.
2) En utilisant le même principe, formez une base orthonormale q_1, q_2, q_3 à partir de trois vecteurs indépendant a, b, c.
3) Montrez que la matrice A dont les vecteurs colonnes sont formés par les vecteurs a, b, c peut se mettre sous la forme QR, où est Q une matrice orthogonale et R triangulaire supérieure.
4) Calculez cette décomposition pour

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5) Résoudre

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ex 5 *Matrices de Rotation et de Householder*

1) Montrez que la matrice de rotation

$$R = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où t est un réel quelconque, est orthogonale. Calculez le déterminant de R.

2) Montrez que la matrice de réflexion

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est orthogonale, Calculer déterminant de U.

3) Montrez que toute matrice $n \times n$ de la forme $H = I_n - 2uu^{\mathrm{T}}$, où u est un vecteur normé de $\mathbf{R}^n$, est orthogonale. Ce sont des matrices de reflexion élementaire (ou Matrice de Householder). Montrez que la matrice de la question **2)** correspond à $n = 3$ et

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4) Interprétation géométrique: montrez que $Hu = -u$ et $Hx = x$ si $u^{\mathrm{T}}x = 0$. Montrez que la matrice de Householder transforme chaque vecteur en son symétrique par rapport au plan perpendiculaire à u (faire un dessin).

5) Contruisez la matrice de Householder qui transforme un vecteur a en r qui est définie de la manière suivante (essayez avec $v = a - r$):

$$\text{si} \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix} \qquad \text{alors} \qquad r = \begin{pmatrix} ||a|| \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6) Touvez la matrice de Householder H_1 qui met à zéro les 2 dernières lignes de la première colonne de A :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculez $H_1 A$. Trouvez la décomposition QR de A.