Semaine 15 : Les moindres carrés. Matrices Equivalentes.

Ex 1 *Les moindres carrés et la décomposition QR*
On résoud au sens des moindres carrés quand on a un système sur-déterminé. C'est à dire on cherche $x \in \mathbf{R}^m$ solution de

$$Ax = b, \quad \text{avec} \quad A \in \mathbf{R}^{n\times m}, \quad b \in \mathbf{R}^n \quad \text{et} \quad n > m$$

et comme on a plus d'équations que d'inconnues, on cherche la solution x tel que $||b - Ax||$ est minimale.
1) Montrer que A peut se mettre sous la forme

$$A = Q \begin{pmatrix} \hat{R} \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec $Q \in \mathbf{R}^{n\times n}$ orthogonale et $\hat{R} \in \mathbf{R}^{m\times m}$ triangulaire supérieure. On peut prendre pour point de départ que si $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ est de rang plein alors, on a $A = QR$ grâce à la méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.
2) Montrez que la solution du problème s'écrit $\hat{R}x = \hat{c}$ où $\hat{c} \in \mathbf{R}^m$, et

$$\begin{pmatrix} \hat{c} \\ d \end{pmatrix} = Q^{\mathrm{T}} b.$$

Montrez aussi que $||d||$ donne la précision de la solution qui minimise les moindres carrés.
3) Trouvez la solution au sens des moindres carrés pour

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ex 2 *Révision 1*
1) Écrivez la matrice de passage de la base canonique de $\mathbf{R}^3$ vers la base $E = (e_1, e_2, e_3)$, avec

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \; e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \; e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2) Déduisez les coordonnées de $u = (7, -3, 5)^{\mathrm{T}}$ dans la base E.
3) Calculez la matrice de passage de E vers $G = ((3,2,1)^{\mathrm{T}},\ (5,3,1)^{\mathrm{T}},\ (6,3,1)^{\mathrm{T}})$. Déduisez les coordonnées de u dans la base G

Ex 3 *Révision 2*
Soit un A un opèrateur linéaire sur $\mathbf{R}^n$ tel que pour un certain v , $A^n(v) = 0$ mais $A^{(n-1)}(v) \neq 0$. Prouvez que les $(A^i(v))_{i=0,n-1}$ forme une base de V. Donnez la forme matricielle de A sur cette base.

Ex 4 *Révision 3: matrice similaires ou semblables*
Dire que deux matrices sont semblables signifie qu'elles représentent le même opérateur dans des bases différentes. C'est à dire qu'il existe une matrice de passage de la base B vers la base E tel que $M_E = P^{-1} M_B P$.

1) Montrez que deux matrices semblables ont le même rang, le même déterminant et la même trace (se souvenir que $\text{Det}(AB) = \text{Det(A)}\ \text{Det}(B)$ et montrer que $\text{Trace}(AB) = \text{Trace}(BA)$).
2) Expliquez pourquoi A et $I + A$ ne sont jamais semblable.
2) Montrez que toute matrice triangulaire supérieure est semblable à une matrice triangulaire inférieures.

Ex 5 *Révision 4*
Trouvez les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Vérifiez que la trace est égale à la somme des valeurs propres et le déterminant à leur produit.