Semaine 17 : Intégration Numériques.

On peut utiliser *Maple* et le package *student* pour les applications numériques.

Ex 1 *Extrapolation de Richarson*

Soit $Q_{app}(h)$ une approximation numérique de Q_{exa} (Q_{app} dépend du pas de discrétisation h).

1) Si on suppose que cette approximation est d'ordre n (c'est à dire que $Q_{exa} = Q_{app}(h) + O(h^n)$), montrez que

$$\frac{2^n Q_{app}(h/2) - Q_{app}(h)}{2^n - 1}$$

est une approximation à l'ordre $n + 1$.

2) soit I_i le resultat de l'intégration numérique obtenue avec la méthode des trapèzes en prenant 2^i intervalles, montrez que

$$\frac{2^2 I_{i+1} - I_i}{2^2 - 1}$$

est une approximation d'ordre au moins 3.

3) soit la fonction suivante

x	$f(x)$
0	1.570796
0.25	1.318116
.5	1.047197
.75	.722734
1.	0.

évaluez $\int_0^1 f(x)dx$ à l'aide de l'approximation de Richarson. Montrez que l'on obtient le même résultat avec la formule de Simpson composée.

Ex 2 *Comparaison sur un exemple simple*

Il s'agit d'évaluer numériquement:

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \; dx$$

dont la valeur exacte est 1.

1) Calculez cet intégrale en utilisant la méthode des trapèzes composés avec 4 intervalles, puis 8 intervalles. Donnez l'erreur.

2) Utilisez l'extrapolation de Richarson avec les deux valeurs obtenues pour obtenir une meilleure approximation. Quel est l'ordre de cette approximation ?

3) Calculez l'intégrale en utilisant la méthode de Simpson avec 4 sous-intervalles. Donnez l'ordre de l'approximation avec l'erreur.

Ex 3 *Erreur de l'approximation*

Si on approxime

$$I = \int_1^2 \ln x dx$$

par la formule de Simpson, l'approximation sera-t-elle plus grande ou plus petite que I ?

Répondre sans calculer d'approximation.

Ex 4
Trouvez A, B, C pour que la formule d'intégration numérique

$$\int_0^1 f(x)dx \sim Af(0) + Bf(\frac{1}{3}) + Cf(1),$$

soit exacte pour tous les polynomes de degré au plus 2. Quel est le degré d'exactitude de la formule obtenue ?

Ex 5
On va calculer $\int_0^\infty e^{-x}x^4dx$ en appliquant la formule de Simpson composée.
1) Tracez le graphe de $e^{-x}x^4$. Choisir M tel que $\int_0^\infty e^{-x}x^4dx \sim \int_0^M e^{-x}x^4dx$.
2) Choisir un nombre d'intervalles n permettant de calculer avec assez de précision cette intégrale (Calculer avec Maple la valeur exacte et écrire un programme en Maple pour la méthode de Simpson et faire plusieurs tests).