Semaine 18 : Applications du calcul des valeurs propres.

Ex 1 *Rotations dans* $\mathbf{R}^3$
Une application est une rotation si la matrice A qui lui est associée est *orthogonale* ($A^{\mathrm{T}} = A^{-1}$) avec $\mathrm{Det}(A) = 1$.

1) Donner les matrices de rotation d'un angle θ autour des axes de vecteur directeur $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$ dans $\mathbf{R}^3$. On appellera $R_1(\theta)$, $R_2(\theta)$ et $R_3(\theta)$ ces rotations.
2) Montrer que le produit de deux de ces matrices correspond encore à un rotation.
3) Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de R_1.
4) On considère la matrice $A = R_2(\pi/2)\ R_1(\pi/2)$. Quel est l'axe et l'angle de rotation associé à A.
5) Montrer que la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

peut représenter une rotation. Trouvez l'axe et l'angle de cette rotation (y-a-t-il un rapport avec θ ?).

Ex 2
Supposons qu'il y ait une épidémie pour laquelle chaque mois :

- la moitié de ceux qui vont bien deviennent malades.
- le quart de ceux qui sont malades meurent.

1) Ècrire les relations qui relient les variables représentant le nombre de personnes en bonne santé (z), malades (y) et mortes (x) entre le k-ième mois et le $(k+1)$-ième mois. Mettre ces relations sous la forme

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}$$

où M est une matrice 3×3.
2) Montrez que M est diagonalisable. Trouvez les valeurs propres de M^k. Trouvez l'état final de ce processus.

Ex 3
Supposons que la population des lapins (x) et des loups (y) suivent les lois suivantes :

$$\begin{aligned} \tfrac{dx}{dt} &= 4x - 2y, \\ \tfrac{dy}{dt} &= x + y. \end{aligned}$$

1) Montrez que ce système se met sous la forme

$$\frac{dU}{dt} = AU \quad \text{où} \quad U(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

et A est une matrice.

2) On définit l'exponentiel de matrice par

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + ... + \frac{(At)^n}{n!} + ...$$

(a) Montrez que $\frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At}$.
(b) Si $U(t=0) = U_0$ alors la solution de $\frac{dU}{dt} = AU$ est $U(t) = e^{At}U_0$.
(c) Si A diagonalisable trouvez les valeurs propres de e^{At}.

3) Calculer les valeurs propres de la matrice A de la question **(1)**.
(a) Le système est-il stable ou instable ?
(b) Si initialement $x = 400$ et $y = 200$, quel sera la population de chaque espèce au temps t.
(c) Après un long temps, quel est la proportion de lapins par rapport aux loups ?

Ex 4 *Forme quadratique 1*
soient $X = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$, $Y = (y_1, y_2)^{\mathrm{T}}$, deux élements de $\mathbf{R}^2$.
1) Trouvez la matrice A symétrique associée à la forme quadratique $Q(X) = x_1^2 + 10x_1x_2 + x_2^2$ ($Q(X) = X^{\mathrm{T}}AX$).
2) Choisir un changement de variable $X = PY$ qui transforme la forme quadratique $Q(X)$ en une autre forme quadratique $G(Y) = ay_1^2 + by_2^2$.

Ex 5 *Forme quadratique 2*
Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

et supposons que $\mathrm{Det}(A)$ est non nul. Soit $Q(x) = X^{\mathrm{T}}AX$.
1) Vérifier que Q est définie positive si $\mathrm{Det}(A) > 0$ et $a > 0$.
2) Vérifier que Q est définie négative si $\mathrm{Det}(A) > 0$ et $a < 0$.
3) Vérifier que Q est indéfinie si $\mathrm{Det}(A) < 0$.