Semaine 19: Rotations

Ex 1 *Rotation solide*
On considère un solide en mouvement uniforme autour d'un axe.
1) On suppose que l'axe de rotation est $\mathbf{k}$ (ou $(0,0,1)$) et la vitesse ω. On sait que la vitesse d'un point M appartenant au solide tel que $\vec{OM} = \mathbf{r}$ est donné par $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \omega\mathbf{k} \wedge \mathbf{r}$. Montrer que cette relation peut se mettre sous la forme $V = AR$ où A est une matrice 3×3, $R = (x, y, z)^{\mathrm{T}}$ et $V = (v_x, v_y, v_z)^{\mathrm{T}}$.
2) Étendre au cas général la formule précédente quand la rotation est définie par le vecteur $\mathbf{\Omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ (l'axe de la rotation est donné par $\mathbf{\Omega}/||\mathbf{\Omega}||$, et la vitesse de rotation par $||\mathbf{\Omega}||$).
Vérifier que A est anti-symétrique ($A^{\mathrm{T}} = -A$).
3) Si A est anti-symétrique et $dR/dt = V = AR$, montrez que :
(a) $R^{\mathrm{T}} \, . \, V = 0$.
(b) La longueur $||R|| = \sqrt{R^{\mathrm{T}} \, . \, R} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ est constante.
4) On définit l'exponentiel de matrice (cf. **Ex** 3 de la semaine 18) par

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + ... + \frac{A^n}{n!} + ...$$

Montrer que si A est antisymétrique alors e^A est orthogonale.
5) On pose $\mathbf{\Omega} = (1, 1, 1)$.
(a) Calculez les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
(b) Calculez les valeurs propres et vecteurs propre de e^A.
(c) Donnez la position du point M à l'instant t sachant qu'il se trouvait en $M_0 = (0, 0, 1)$ quand $t = 0$.

Ex 2 *Rotations et quaternions*
soit les trois matrices

$$i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Montrez que :
(a) $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, où 1 est la matrice unité
(b) $ij = -ji = k$; $jk = -kj = i$; $ki = -ik = j$
Ces trois matrices (i, j et k (plus la matrice 1)) forme la base des *quaternions* qui constitue un groupe.
Un quaternion q sera une matrice de la forme $q = w + ix + jy + kz = (s, \mathbf{v})$, avec $s = w$ et $\mathbf{v} = (x, y, z)$.
On notera dans la suite $\bar{q} = w - ix - jy - kz$ (remarquer l'analogie avec les nombres complexes).
(c) Montrez que $w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = q\bar{q}$
(d) Montrez en utilisant les formules (a) que

$$q_1 q_2 = (s_1 s_2 - \mathbf{v_1}.\mathbf{v_2}, s_1\mathbf{v_2} + s_2\mathbf{v_1} + \mathbf{v_1} \wedge \mathbf{v_2}).$$

2) On va montrer que l'on peut associer à une rotation de $\mathbf{R}^3$ un quaternion (c'est à dire une matrice de la forme $r = (\cos\theta/2, \mathbf{u}\sin\theta/2)$ avec $||\mathbf{u}|| = 1$). $\mathbf{u}$ est l'axe de la rotation et θ l'angle.

(a) On pose $\mathbf{u} = (0,0,1)$ et on associe au point (ou vecteur) (x,y,z) de l'espace à trois dimensions le quaternion "pur"

$$p = ix + jy + kz = (x,y,z)$$

Vérifier que $p' = rp\bar{r}$ est une rotation. Donnez son axe et son angle de rotation.
(b) Soit $\mathbf{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$, montrez que la transformation $p' = rp\bar{r}$ laisse le vecteur (α, β, γ) invariant.
(c) Le produit de deux rotations correspond au produit de deux quaternions. Calculer l'axe et la rotation de la matrice A de l'**Ex 1** de la semaine 18 en utilisant les quaternions ($A = R_2(\pi/2)R_1(\pi/2)$.

Ex 3
Y-a-t-il une solution dans $\mathbf{R}^3$ à l'équation

$$-x^2 - 5y^2 - 9z^2 - 4xy - 6xz - 8yz = 1 \quad ?$$