Semaine 20: Forme quadratique et valeurs singulières

Ex 1 *Forme quadratique: méthode de Gauss*
1) Soit la matrice symétrique

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

Calculer la décomposition LU de cette matrice. Montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme $A = LDL^{\mathrm{T}}$ où la matrice L est triangulaire inférieure avec $l_{ii} = 1$ et La matrice D est diagonale.
2) Soit la forme quadratique $Q(X) = X^{\mathrm{T}}AX$.
(a) Utiliser la méthode de Gauss pour la mettre sous la forme de somme de puissance carrée.
(b) Montrer que cela revient à faire le changement de variable $Y = L^{\mathrm{T}}X$.
3) Montrez que les élements diagonaux de D et les valeurs propres de A ont les mêmes signes.

Ex 2 *Matrice définie positive*
1) Montrer que toute matrice symétrique A de taille $n \times n$ peut se mettre sous la forme LDL^{T} comme définie dans la question **1)** de l'**Ex 1**.
2) Si A est définie positive, montrez que A s'écrit sous la forme $A = R^{\mathrm{T}}R$ avec R qui est une matrice triangulaire supérieure.
3) Soit A une matrice $n \times m$ de rang m, montrez que $Q(x) = \frac{1}{2}||Ax||^2$ correspond à une forme quadratique définie positive. Trouvez la matrice symétrique associée.
4) Montrez que le minimum de $\frac{1}{2}||Ax - b||^2$ est $A^{\mathrm{T}}Ax = A^{\mathrm{T}}b$. Cette formule vous rappelle-t-elle quelque chose ?

Ex 3 *Quotient de Rayleigh*
Trouvez les valeurs minimales de

$$R(x) = \frac{x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \quad \text{et} \quad R(x) = \frac{x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2}{2x_1^2 + x_2^2}$$

Ex 4 *Décomposition en valeurs singulières*
On considère le système suivant:

$$\begin{cases} x + y + z & = & 3 \\ x - y + z & = & 1 \end{cases}$$

1) Montrer que la solution générale de ce système est donnée par :

$$X_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2) Soit $J(\alpha) = ||X_s||^2$, montrer que J est quadratique en α et trouver α tel que J soit minimal. Que vaut alors X_s ?
3) Le système proposé s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Trouver la décomposition SVD associée :

$$A = U\Sigma V^{\mathrm{T}}$$

Préciser les dimensions des diverses matrices.

4) On pose

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = V^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = V^{\mathrm{T}} X$$

Trouver sans trop de calcul que la solution X' du système (en particulier que z' est quelconque).

5) En utilisant le fait que V est orthogonale, montrer que (x, y, z) et (x', y', z') ont la même norme. En déduire que la solution minimale est atteinte pour $z' = 0$. Retrouver alors **2)**.