Semaine 22 : Norme et conditionnement, Integrale double

Ex 1 *Conditionnement de Matrice*
On considère le système suivant :

$$AX = Y \tag{1}$$

où X et Y sont deux vecteurs de $\mathbf{R}^n$ et A est une matrice $n \times n$. Lorsque l'on cherche à résoudre numériquement ce système en se donnant A et y, il est intéressant de connaître l'influence de la précision utilisée pour représenter A et y en mémoire (c'est à dire d'évaluer les erreurs d'arrondis). Nous allons étudier séparément les erreurs d'arrondis liées à y et A.
1) On définit l'application suivante

$$|| \,.\, || : A \to \sup_{||x||=1} ||AX||$$

Montrer que cette application définit une norme et que

$$||Ax|| \leq ||A||\ ||x|| \quad \text{et} \quad ||ABx|| \leq ||A||\ ||B||\ ||x||$$

On appelle *conditionnement* de A le réel $c(A) = ||A||\ ||A^{-1}||$. Montrer qu'il est toujours plus grand ou égal à 1
2) On suppose que la valeur de Y est arrondie à $Y' = Y + \delta Y$. Le système (1) devient alors

$$AX = Y + \delta Y \tag{2}$$

Si X_0 solution du système (1), on notera $X_0 + \delta X_0$ la solution de (2).
Montrer alors que l'on a

$$\frac{||\delta X_0||}{||X_0||} \leq c(A)\ \frac{||\delta Y_0||}{||Y_0||}$$

3) Dans A, les coefficients sont arrondis et le système (1) devient alors

$$(A + \delta A)X = Y$$

On écrit comme précédemment la solution de ce système sous la forme $X_0 + \delta X_0$. Montrer alors que l'on a

$$\frac{||\delta X_0||}{||X_0 + \delta X_0||} \leq c(A)\ \frac{||\delta A||}{||A||}$$

4) Quelle valeur prend $c(A)$ lorsque A est une matrice symétrique ?
5) On considère le système suivant

$$\begin{cases} 2a + 1.4b &= 1 \\ 1.4a + b &= 1 \end{cases}$$

Déterminer le conditionnement associé à ce système. Résoudre ce système puis le système

$$\begin{cases} 2a + 1.4b &= 1 \\ 1.4a + 1.1b &= 1 \end{cases}$$

et conclure.

Ex 2

Soit $f(x,y) = 1$ la densité d'une masse dans le domaine R délimité par

$$0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \quad , \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Trouvez la masse totale de l'objet, son centre de gravité et les moments d'inertie I_x, I_y et I_0.

Ex 3

En utilisant les coordonnées polaires, calculer $\int_R \int f(x,y)\, dx\, dy$ pour $f(x,y) = 2(x+y)$ et $R:\ x^2+y^2 \leq 9$, $x \geq 0$.