Solution 12 : Orthogonalité

"survival kit" (le nécessaire de survie ou les principaux concepts en vrac)

- le produit scalaire dans $\mathbf{R}^n$ est définie par $(u,v) = u^{\mathrm{T}}v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$. La norme par $||u|| = \sqrt{u^{\mathrm{T}}u}$.
- On dit que u est orthogonal à v (ou $u \perp v$) si $(u,v) = u^{\mathrm{T}}v = 0$.
- Une famille de vecteur $(q_i)_{i=1,K}$ est une famille orthonormale si $q_i^{\mathrm{T}} q_j = \delta_{i,j}$ ($= 1$ si $i = j$ sinon 0).
- Si on note E le sous espace de $\mathbf{R}^n$ engendré par une famille de vecteur $(c_i)_{i=1,K}$, l'orthogonal de E (noté $E^{\perp}$ est le sous espace des vecteurs qui sont orthogonaux à tous les c_i, $i = 1, K$. C'est à dire les vecteurs x tel que $\forall\ i\ c_i^{\mathrm{T}} x = 0$.
- Tout élement de x de $\mathbf{R}^n$ se décompose de manière unique en un élement appartenant à E et un autre à $E^{\perp}$. Formellement, $x = y + z$ avec $y \in E$ et $z \in E^{\perp}$. On dit aussi que $\mathbf{R}^n = E \oplus E^{\perp}$.
- si $(c_i)_{i=1,K}$ est une base orthogonale de E alors $y = \sum_{i=1}^{K} \alpha_i c_i$ avec $\alpha_i = y^{\mathrm{T}} c_i / c_i^{\mathrm{T}} c_i$. On dit que y est la projection de x sur E.
- L'équation $Ax = b$ (A est une matrice $m \times n$, x et b sont des vecteurs de dimesion n et m respectivement) veut tout simplement dire que b est une combinaison linéaire des colonnes de A.
- On appelle l'image de A le sous espace vectoriel formé par les vecteurs colonnes de A : $\mathrm{Im}(A) = \{Ax, x \in \mathbf{R}^n\}$.
- On appelle le noyau de A le sous espace vectoriel engendré par les vecteurs qui sont orthogonaux aux lignes de la matrice A : $\mathrm{Ker}(A) = \{x / Ax = 0\}$
- l'orthogonal de $\mathrm{Im}(A)$ est le noyau de la matrice transposé A^{T}, car les lignes de cette matrice correspondent aux colonnes de la matrice de départ A. On a $\mathbf{R}^n = \mathrm{Im}(A) \oplus \mathrm{Ker}(A^{\mathrm{T}})$.
- si $a \perp b$ alors $||a+b||^2 = ||a||^2 + ||b||^2$ (théorème de Pythagore).
- le minimum de distance entre un vecteur x est un sous espace vectoriel E est atteint pour p la projection de x sur E. Formellement $\min_{y \in E} ||x - y|| = ||x - p||$.
- Trouver x tel que $||Ax - b||$ soit minimale revient à chercher un élement y de $\mathrm{Im}(A)$ tel que $||y - b||$ soit minimum. Donc y est la projection de b sur $\mathrm{Im}(A)$ et $y - b$ doit appartenir à $\mathrm{Ker}(A^{\mathrm{T}})$. C'est à dire $A^{\mathrm{T}}(Ax - b) = 0$ ou $A^{\mathrm{T}}Ax = A^{\mathrm{T}}b$.

Ex 1 *Mise en train*

1) Par définition, $\mathbf{u}.\mathbf{v} = \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$. On a donc

$$\begin{aligned} \mathbf{u}.\mathbf{u} &= 35 \\ \mathbf{v}.\mathbf{v} &= 49 \\ \mathbf{u}.\mathbf{v} &= 35 \end{aligned}$$

De même, $||\mathbf{u}|| = (\mathbf{u}.\mathbf{u})^{1/2}$. On a donc $||\mathbf{u}|| = \sqrt{35}$ et $||\mathbf{v}|| = 7$.

2) La distance entre les extrémités de $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ est la norme du vecteur $\mathbf{u} - \mathbf{v}$. On a donc

$$d = ||(u - v)|| = \sqrt{14}$$

3) On a bien $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ qui ne sont pas colinéaires. Ils engendrent bien un plan P dans $\mathbf{R}^3$. L'espace orthogonal à P est l'espace des vecteurs orthogonaux à la fois à $\mathbf{u}$ et à $\mathbf{v}$. C'est les vecteurs $\mathbf{w} = (x, y, z)^{\mathrm{T}}$ qui satisfont :

$$\mathbf{u}.\mathbf{w} = \mathbf{v}.\mathbf{w} = 0$$

ce qui donne le système

$$\begin{aligned} 3\,x - y + 5\,z &= 0 \\ 6\,x - 2\,y + 3\,z &= 0 \end{aligned}$$

On peut prendre pour base

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ex 2 *Alternative de Fredholm*
1) soit y appartenant au noyau de A^{T}, alors $A^{\mathrm{T}}y = 0$, si il existe x solution de (1) on peut écrire

$$y^{\mathrm{T}}b = y^{\mathrm{T}}Ax = (Ay)^{\mathrm{T}}x = 0$$

ce qui est incompatible avec $y^{\mathrm{T}}b \neq 0$.

2) Le noyau de A^{T} est engendré par le vecteur $\mathbf{w} = (1, 2)^{\mathrm{T}}$. Par conséquent $\mathbf{b}$ doit vérifier $\mathbf{b}.\mathbf{w} = 0$, ce qui donne $h = -1/2$.

Ex 3 *Pour le fun*
$(i) \Rightarrow (ii)$
Soit $y \in Im(f) \cap Ker(f)$ alors
il existe x telque $y = f(x)$ et $f^2(x) = 0$
(i) implique que $f(x) = 0$ donc y est nul
$(ii) \Rightarrow (i)$
On sait que $Ker(f) \subset Ker(f^2)$; Soit $y \in Ker(f^2)$ alors $f^2(y) = 0$
mais x tel que $x = f(y)$ vérifie $x \in Im(f)$ et $x \in Ker(f)$ (car $f(x) = f^2(y) = 0$)
(ii) implique que $x = 0$ et donc que $y \in Ker(f)$.

Ex 4 *Projection sur une droite*

1) on utilise la formule $P = \frac{aa^{\mathrm{T}}}{a^{\mathrm{T}}a}$. On trouve

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix} \;\; ; \;\; P_2 = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{-3}{10} \\ \frac{-3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a^{\perp} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2)

$$P_1 + P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad P_1 \ P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C'est normal car $(a, a^{\perp})$ forme une base de $\mathbf{R}^2$ et $P_1 x$ est colinéaire à a et donc sa projection sur l'orthogonal de a est zéro.

Ex 5 *Solution qui minimise les moindres carrés*

1)

$$C + D + E = 3, C + 3E = 6, C + 2D + E = 5, C = 0$$

Il n'y a pas de solution.

2) On cherche la solution de $A^{\mathrm{T}} A x = A^{\mathrm{T}} b$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \\ 26 \end{pmatrix}$$