Solution 14 : Orthogonalité (suite)

"Survival Kit" (le nécessaire de survie ou les principaux concepts en vrac)

La matrice Q de dimension $n \times n$ orthogonale vérifie les propriétés suivantes :

- $Q^{\mathrm{T}}Q = QQ^{\mathrm{T}} = I$ ou $Q^{-1} = Q^{\mathrm{T}}$
- Les colonnes de Q forment une base orthonormale
- la multiplication par Q préserve la norme : $||Qx|| = ||x||$

La matrice $S = A^{\mathrm{T}}A$ est une matrice symétrique dont les élements correspondent aux produits scalaires des vecteurs colonnes c_i de A. On a $s_{i,j} = c_i^{\mathrm{T}}c_j$.

Ex 1 *Révision 1*
1) La définition est de trouver une matrice A tel qu'il existe $x_i \in \mathbf{R}^3$ et $Ax_i = v_i$. Il suffit de prendre la matrice A dont les vecteurs colonnes engendrent le sous espace V (la solution naturelle est que x_i a toutes ses composantes nulles sauf un 1 à la ième composante). On peut aussi remarquer que V est le sous-espace engendré par les vecteurs $e_1 = (1,0,0)^{\mathrm{T}}$ et $e_2 = (0,1,0)^{\mathrm{T}}$. Cela signifie que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Il faut touver une matrice B tel que $Be_1 = Be_2 = 0$ (on peut faire la même chose avec $Bv_1 = Bv_2 = Bv_3 = 0$, c'est un peu plus long).
On peut aussi écrire que si $\ker(B) = (e_1, e_2)$ alors $\mathrm{Im}(B^{\mathrm{T}}) = (e_3) = ((0,0,1)^{\mathrm{T}})$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ex 2 *Révision 2*
1) Si $[u, v, w]$ forme un famille orthogonale alors on a

$$(u, v) = (u, w) = (v, w) = 0$$

remarquons que cela implique que u, v et w sont linéairement indépendants. En effet si $t = \alpha u + \beta v + \gamma w = 0$, alors $(u, t) = \alpha = 0$, $(v, t) = \beta = 0$ et $(w, t) = \gamma = 0$.
2) Si on pose $x = c_1 u + c_2 v + c_3 w$, on a $(u, x) = c_1\ (u, u)$ et donc $c_1 = (u, x)/(u, u)$, etc ....
Finalement

$$c_1 = 4/3, c_2 = 1/3 \text{ et } c_3 = 1/3$$

Ex 3 *Revision 3*
Soit x_2 solution du pb et $x_1 \in \mathrm{Ker}(A)$ ($Ax_1 = 0$), on a la solution $x = \alpha x_1 + x_2$ qui vérifie $Ax = Ax_2 = b$. Dans l'autre sens, $x \in \mathbf{R}^3$ peut se décomposer de la manière suivante $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \mathrm{Ker}(A)$ et $x_2 \in \mathrm{Im}(A^{\mathrm{T}})$.

Par construction $x_2 = A^{\mathrm{T}}y$, où y solution unique de $AA^{\mathrm{T}} = b$ (AA^{T} est une matrice 2×2).
Puisque $\mathrm{Ker}(A) = \langle(-2,1,0)^{\mathrm{T}}\rangle$, on obtient

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3/5 \\ -6/5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ex 4 *Orthogonalisation de Gram-schmidt*
1) On prend, $q_1 = a/||a||$ et $q_2 = b'/||b'||$ où $b' = b - (q_1^{\mathrm{T}}b)q_1$.

2) on prend $q_3 = c'/||c'||$ avec $c' = c - (q_1^{\mathrm{T}}c)q_1 - (q_2^{\mathrm{T}}c)q_2$.

3) Par construction puisque b appartient à l'espace engendré par q_1 et q_2 on a $b = (q_1^{\mathrm{T}}b)q_1 + (q_1^{\mathrm{T}}b)q_2$, De même $c = (q_1^{\mathrm{T}}c)q_1 + (q_1^{\mathrm{T}}c)q_2 + (q_3^{\mathrm{T}}b)q_3$ et $a = (q_1^{\mathrm{T}}a)q_1$. Sous forme matricielle cela donne :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1^{\mathrm{T}}a & q_1^{\mathrm{T}}b & q_1^{\mathrm{T}}c \\ 0 & q_2^{\mathrm{T}}b & q_2^{\mathrm{T}}c \\ 0 & 0 & q_3^{\mathrm{T}}c \end{pmatrix}$$

4)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5) on résoud $Q\ Y = b$ en utilisant $y_i = q_i^{\mathrm{T}}b$.
Puis on résoud $RX = Y$ en utilisant que R est triangulaire supérieure :

$$x_3 = b_3\ ;\ x_2 = b_2 - r_{2,3}x_3\ ;\ x_1 = b_1 - r_{1,2}x_2 - r_{1,3}x_3.$$

On a

$$Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ex 5 *Matrices de rotation et de Householder*
1) et **2)** on vérifie que $RR^{\mathrm{T}} = UU^{\mathrm{T}} = I$
3)

$$H^{\mathrm{T}} = I^{\mathrm{T}} - 2(uu^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = I - 2uu^{\mathrm{T}} = H$$

et donc

$$HH^{\mathrm{T}} = I - 4uu^{\mathrm{T}} + 4uu^{\mathrm{u}}uu^{\mathrm{T}}$$

on utilise $uu^{\mathrm{T}}uu^{\mathrm{T}} = u(u^{\mathrm{T}}u)u^{\mathrm{T}}$ et on a $HH^{\mathrm{T}} = I$.
4)
On décompose un vecteur v qcq, $v = (u^{\mathrm{T}}v)u + x$ et on a $Hv = -(u^{\mathrm{u}}v)u + x$.
5)
On prend $u = v/||v||$ avec $v = a - r$. On a

$$Ha = \left(I - 2\frac{vv^{\mathrm{T}}}{||v||^2}\right) a = a - (a-r)\frac{2(a-r)^{\mathrm{T}}a}{(a-r)^{\mathrm{T}}(a-r)} = a - (a-r) = r$$

car $2\ (a-r,a) = (a-r,a-r)$.

6)
on pose $a = (2,1,2)^{\mathrm{T}}$, $r = (3,0,0)^{\mathrm{T}}$ et $v = (-1,1,2)^{\mathrm{T}}$. Finalement

$$H_1 = Q = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$