Solution 15 : Les moindres carrés. Matrices Equivalentes.

"Survival Kit"

• Il y a deux manières de trouver la solution x qui minimise $||b-Ax||$ avec $x \in \mathbf{R}^m$, $b \in \mathbf{R}^n$, $A \in \mathbf{R}^{n\times m}$ avec $n > m$ et $\text{rang}(A) = m$:

- on prend x solution de $A^{\mathrm{T}}Ax = A^{\mathrm{T}}b$.
- on factorise $A = QR$, $Q \in \mathbf{R}^{n\times n}$ et R triangulaire supérieure et x solution de $Rx = Q^{\mathrm{T}}b$.

Ex 1 *Les moindres carrés et la décomposition QR*
1) On peut contruire une matrice $\tilde{A} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ de rang n tel que

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$$

où b complète dans $\mathbf{R}^n$ la base formée par les vecteurs colonnes de A. On peut faire une décomposition $\tilde{Q}\tilde{R}$ sur $\tilde{A}$ en utilisant la méthode de Gram-schmidt :

$$\tilde{A} = (q_1\ q_2\ \dots\ q_n) \begin{pmatrix} \hat{R} & R_1 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix}$$

où $\hat{R} \in \mathbf{R}^{m\times m}$ et $R_2 \in \mathbf{R}^{(n-m)\times(n-m)}$ sont triangulaires supérieures.
Finalement il suffit de prendre

$$Q = \tilde{Q} \quad \text{et} \quad R = \begin{pmatrix} \hat{R} \\ 0 \end{pmatrix}$$

2)
si on note $r = b - Ax$, on a $||Q^{\mathrm{T}}r|| = ||r||$ car Q est orthogonale. Donc on peut chercher la solution qui minimise la norme de s avec

$$s = Q^{\mathrm{T}}b - \begin{pmatrix} \hat{R} \\ 0 \end{pmatrix} x$$

So on écrit $c = Q^{\mathrm{T}}b = \begin{pmatrix} \hat{c} \\ d \end{pmatrix}$, $\hat{c} \in \mathbf{R}^m$, on a finalement

$$||s|| = ||\hat{c} - \hat{R}x|| + ||d||$$

le minimum de s est atteint pour $\hat{c} - \hat{R}x = 0$ qui existe puisque A est de rang(m).
3)
Cf. question **6)** de la semaine 14, on a $c = (3, -3, 3)^{\mathrm{T}}$ et $x = (-1, 3)^{\mathrm{T}}$ et $||Ax - b|| = 3$

Ex 2 *Révision 1*
1)
C'est la matrice formée dont les vecteurs colonnes sont la base E; car on doit avoir $P\ x_E = x_{canonique}$ et donc $P\ (1,0,0)^{\mathrm{T}} = v_1$ etc ...

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2)
On a $x_E = P^{-1}x_{canonique}$. Finalement

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_E = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Rq : pour calculer P^{-1} , on résoud successivement $P\ x_i = I_i$ et $P^{-1} = (x_1\ x_2\ x_3)$. I_i est le vecteur colonne qui a des zeros partout sauf un 1 à $i$ème position. **3)**
Il faut trouver les coordonnées des vecteurs de la base G par rapport à la base E et donc résoudre $g_{i,E} = P^{-1}g_i$ et la matrice de passage a pour colonne les $g_{i,E}$.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Om a $u_G = T^{-1}\ P^{-1}\ u$:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ u_G = \begin{pmatrix} 18 \\ -31 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Rq : pour calculer la matrice inverse de T, on utilise sa décomposition LU calculer lors du TD sur la méthode LU. On doit résoudre $T(x_1 \quad x_2 \quad x_3) = (I_1 \quad I_2 \quad I_3)$, les colonnes de la matrice T^{-1} sont les vecteurs x_i.

Ex 3 *Révision 2*
On écrit $\alpha_0 v + \alpha_1 Av + ... + \alpha_{n-1}A^{(n-1)}v = 0$, On applique A, $(n-1)$ème fois, on trouve $\alpha_0 = 0$, et de proche en proche on trouve que tous les coefficient sont nuls.

Si on note $(v_i)_i = (A^{(i-1)}v)_i$ cette base. On a $Av_i = v_{i+1}$ Donc la matrice A dans cette base est faite de 0 partout, sauf sous la diagonale où l'on a des 1.

Ex 4 *Révision 3*
1)
Le rang d'une matrice est la dimension de son Image. On peut remarquer que si $v \in \mathrm{Im}(M_E)$ alors $Pv \in \mathrm{Im}(M_B)$. Comme P est de rang plein par construction, on a $\mathrm{Im}(M_E)$ et $\mathrm{Im}(M_B)$ qui ont même dimension car à partir d'une base de $\mathrm{Im}(M_E)$ on peut construire une base de $\mathrm{Im}(M_B)$.

$\mathrm{Det}(M_E) = \mathrm{Det}(P^{-1})\ \mathrm{Det}(M_B)\ \mathrm{Det}(P) = \mathrm{Det}(M_B)$.

$\mathrm{Trace}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}$. $\mathrm{Trace}(AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,i} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{k,i}a_{i,k} = \mathrm{Trace}(BA)$.
Donc $\mathrm{Trace}(M_E) = \mathrm{Trace}(P^{-1}M_BP) = \mathrm{Trace}(M_B)$.

2)
elles n'ont pas la même trace.

3)
Il faut inverser l'ordre des vecteurs choisis. On peut remarquer que $i$ème vecteur colonne de la matrice M est ègal à $M\ I_i$.
Pare exemple pour transformer $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ on utilise la matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ex 5 *Révision 4*
Valeur propre 3 et $v_1 = (1, -2)$; Valeur propre 2 et $v_2 = (-1, 1)$.

trace(A) = 5 = 3+2 ; Det(A) = 4 +2 = 6 = 2 x 3;