Solution 17 : Intégration Numérique.

"Survival Kit"

- Formule des trapèzes :

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\ dx = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_1)\right) - \frac{f^{(2)}(\eta)}{12}h^3 \quad \eta \in [x_0, x_1]$$

- Formule des trapèzes composées : $h = \frac{b-a}{n}$, n le nombre d'intervalles

$$\int_a^b f(x)\ dx \sim \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\left[f(x_1) + f(x_2) + ...f(x_{n-1})\right] + f(x_n)\right)$$

$$\text{Erreur} = -\frac{b-a}{12}f^{(2)}(\eta)h^2$$

- Formule de Simpson :

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\ dx = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right) - \frac{f^{(4)}(\eta)}{90}h^5 \quad \eta \in [x_0, x_1]$$

- Formule de Simpson composée : $h = \frac{b-a}{2n}$

$$\int_a^b f(x)\ dx \sim \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + ... + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})\right)$$

$$\text{Erreur} = -\frac{b-a}{180}f^{(4)}(\eta)h^4$$

- Formule d'extrapolation de Richarson : $Q_{exa} = Q_{app}(h) + O(h^n)$

$$Q_{exa} = \frac{2^n Q_{app}(h/2) - Q_{app}(h)}{(2^n - 1)} + O(h^{n+1})$$

Ex 1 *Extrapolation de Richarson*

1)

On écrit :

$$Q_{exa} = Q_{app}(h) + c_n h^n + c_{n+1} h^{n+1} + ...$$

On remplace h par $h/2$ ce qui conduit à la relation

$$Q_{exa} = Q_{app}(h/2) + \frac{c_n}{2^n} h^n + \frac{c_{n+1}}{2n+1} h^{n+1} + ...$$

On a finalement

$$(2^n - 1) = 2^n Q_{app}(h/2) - Q_{app}(h) - \frac{1}{2} c_{n+1} h^{n+1} + ...$$

et on obtient le résultat final.

2)

On a $h = (b-a)/2^i$ et $h/2 = (b-a)/2^{i+1}$. Comme la formule des trapèzes composées est d'ordre 2, l'approximation de Richarson donne une approximation d'ordre au moins 3. En fait c'est 4 car le terme c_3 est nul pour la formule des trapèzes.

3)

On prend $h = .5 = 1/2$ et $h/2 = .25$ et on a $I_1 = .9162975$, $I_2 = .96836125$. La formule de Richarson $I_R = .985715833$ et Simpson $I_S = .9857158333$

Ex 2 *Comparaisons sur un exemple simple*

1) Si on a 4 intervalles de longueur:

$$h = \frac{\pi/2 - 0}{4} = \frac{\pi}{8}$$

alors la formule des trapèzes composée donne

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \; dx \simeq \frac{\frac{\pi}{8}}{2}(\sin 0 + 2[\sin\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{8}] + \sin\frac{\pi}{2}) = .9871158$$

et l'erreur est égale à .01288.

Avec 8 intervalles, $h = \frac{\pi}{16}$ et

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \; dx \simeq \frac{\frac{\pi}{16}}{2}(\sin 0 + 2[\sin\frac{\pi}{16} + \sin\frac{\pi}{8} + \sin\frac{3\pi}{16} + \sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{5\pi}{16} + \sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{7\pi}{16}] + \sin\frac{\pi}{2}) = .9967852$$

et l'erreur est .0032.

2) Pour la formule des trapèzes composés l'erreur totale commise est $-\frac{(b-a)}{12} f''(\eta) h^2$, Par conséquent la formule de Richarson avec $n = 2$ s'ecrit

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \; dx \simeq \frac{2^2(.9967852) - .9871158}{2^2 - 1} = 1.000000833$$

ce qui correspond à une approximation d'ordre 4.

3) Pour la méthode de Simpson 1/3 on doit diviser en 4 sous intervalles de longueur $h = \frac{\pi}{8}$. On a alors

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \; dx \simeq \frac{\frac{\pi}{8}}{3}(\sin 0 + 4\sin\frac{\pi}{8} + 2\sin\frac{\pi}{4} + 4\sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{2}) = 1.0001346$$

Le terme d'erreur de la méthode de Simpson 1/3 est $-\frac{(b-a)}{180} f^{(4)}(\eta) h^4$.

Ex 3 *Erreur de l'approximation*

L'erreur pour la méthode de Simpson est $-\frac{f^{(4)}(\eta)}{90}h^5$, puisque $f^{(4)} = \frac{-6}{x^4}$ alors l'erreur est positive et donc la valeur réelle est supérieure à la valeur approchée.
$f^{(4)}(\eta)$

Ex 4

$A = 0$, $B = 3/4$, $C = 1/4$. Le degré est 2 car l'égalité n'est pas vérifiée pour les polynômes de degré 3.

Ex 5

On peut prendre $M = 100$ et $n = 50$ et on trouve 23.90514 au lieu de 24 (valeur réelle).