Solution 18 : Applications du calcul des valeurs propres.

Ex 1 *Les rotations de* $\mathbf{R}^3$

1)

$$R_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \; ; R_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \; ; R_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2)
On a $\mathrm{Det}(R_i\ R_j) = \mathrm{Det}(R_i)\ \mathrm{Det}(R_j) = 1$ et $(R_i\ R_j)^{\mathrm{T}} = (R_i\ R_j)^{-1}$.

3)
Les valeurs propres de R_1 sont 1, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\ \sin\theta$ et $e^{i\theta} = \cos\theta + i\ \sin\theta$ et les vecteurs propres: $(1,0,0)$, $(0,1,-i)$ et $(0,1,i)$. On peut remarquer que $\mathrm{Trace}(R_1) = 1 + 2\cos\theta$.

4) On a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On cherche $AX = X$, on peut prendre $X = (1,1,-1)$ et on a $A^3 = I$ donc $\theta = 2\pi/3$. On peut aussi calculer les valeurs propres complexes de A qui sont $-1/2 \pm i\ \sqrt{3}/2$. Ces valeurs correspondent à $\exp(\pm 2\pi/3)$, l'axe de la rotation est le vecteur propre associé à la valeur propre 1.

5)
C'est une rotation car $\mathrm{Det}(B) = 1$ et les vecteurs colonnes forment une base othonormée.
Pour trouver l'axe de rotation, on doit résoudre $BX = X$ et on trouve $x = 0$ et $(\cos\theta - 1)y + \sin\theta z = 0$.
On peut prendre comme direction $(0, 1, \sin\theta/(1+\cos\theta))$.
On peut remarquer que $B^{-1} = B$ ou que $B^2 = I$ donc l'angle de rotation est π. On peut aussi rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres de B.

Ex 2

1)
on a

$$z_{k+1} = \frac{z_k}{2} \; ; \; y_{k+1} = 3/4 y_k + 1/2 z_k \; ; x_{k+1} = x_k + 1/4 y_k$$

La matrice M est égal à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

2)
M est diagonalisable car triangulaire supérieure. Les valeurs propres sont les élements diagonaux :

$$\lambda_1 = 1, V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \; \lambda_2 = 3/4, V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \; \lambda_3 = 1/2, V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On déduit de la relation matricielle $X_k = M^k X_0$. Pour avoir l'état limite, il faut trouver la limite de M^k quand $k \to \infty$. Comme M est diagonalisable $M = S\Sigma S^{-1}$ et $M^k = S\Sigma^k S^{-1}$. Donc si $S^{-1}X_0 = C$, on a $X_K = c_1\lambda_1^k V_1 + c_2\lambda_2^k V_2 + c_3\lambda_3^k V_3$. Les valeurs propres inférieures à 1 (λ_2 et λ_3) tendent vers 0. L'état final correspond à toute la population qui est morte.

Ex 3
1)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2)
(a) On utilise que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{(At)^n}{n!}\right) = n\frac{A^n t^{n-1}}{n!} = A\frac{(At)^{n-1}}{(n-1)!}$$

(b) c'est direct en utilisant la formule de (a).
(c) On utilise la formule de l'exercise précédent sur les valeurs propres de A^k. Si $A = S\Sigma S^{-1}$ avec Σ matrice diagonale alors $(At)^k = S(\Sigma t)^k S^{-1}$ et $e^{At} = Se^{\Sigma t}S^{-1}$.

3)
On a $\lambda_1 = 3$ et $V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = 2$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
(a) instable, les valeurs propre sont plus grande que 1. La population de chaque espèce croît.
(b) une solution s'écrit sous la forme $U(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} V_2$. Pour $t = 0$, $U = (200, 100)^{\mathrm{T}}$ alors $c_1 = c_2 = 100$. On a finalement :

$$U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 100e^{3t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 100e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) On prend le terme qui croît le plus rapidement : le rapport approche 2/1.

Ex 4 *Forme Quadratique 1*
1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

2)
On cherche les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

$$\lambda_1 = 6, V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \lambda_2 = -4, V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a $PY = X$ où P doit être orthogonale :

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et $Q(Y) = 6y_1^2 - 4y_2^2$.

Ex 5 *Forme Quadratique 2*
Les valeurs propres (λ_1, λ_2) de A sont solution du polynôme caractéristique

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - b^2 = 0$$

On a donc $\lambda_1 + \lambda_2 = a + d = \mathrm{Trace}(A)$ et $\lambda_1\lambda_2 = ad - b^2 = \mathrm{Det}(A)$.
Si Q est définie positive (resp. negative) si les valeurs propres de A sont positives (resp. negative).

1- si $\mathrm{Det}(A) > 0$, on a $ad > 0$ et donc a et d ont le même signe.
2- si $a > 0$, alors $a + d > 0$ et les valeurs propres sont positives.
2- si $a < 0$, alors $a + d < 0$ et les valeurs propres sont négatives.