Solution 19 : Rotations.

Ex 1 *Rotation solide*

1)
On a après calcul $\mathbf{v} = (-\omega\ y, \omega\ x, 0)$. Donc on obtient

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2)
Dans le cas général

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} \omega_y z - \omega_z y \\ \omega_z x - \omega_x z \\ \omega_x y - \omega_y x \end{pmatrix}$$

On vérifie facilement que A est anti-symétrique ($A^{\mathrm{T}} = -A$).
3)
On utilise $V^{\mathrm{T}}R = R^{\mathrm{T}}V$ et on obtient $2R^{\mathrm{T}}AR = 0$.
On utilise $d(R^{\mathrm{T}}R)/dt = (dR/dt)^{\mathrm{T}}R + R^{\mathrm{T}}dR/dt$.
4)
En utilisant que l'exponentiel est une somme de produit de matrice, on a $(e^A)^{\mathrm{T}} = e^{A^{\mathrm{T}}}$.
Puisque A est anti-symétrique $e^{A^{\mathrm{T}}} = e^{-A}$ et donc $(e^A)^{\mathrm{T}} = (e^A)^{-1}$
5)
Si $\Omega = (1,1,1)$, on a les valeurs propres de A

$$\lambda_1 = 0, V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \lambda_2 = i\sqrt{3}, V_2 = \begin{pmatrix} -1/2 - i\sqrt{3}/2 \\ -1/2 + i\sqrt{3}/2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \lambda_3 = -i\sqrt{3}, V_3 = \begin{pmatrix} -1/2 + i\sqrt{3}/2 \\ -1/2 - i\sqrt{3}/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si $A = S\Sigma S^{-1}$ alors $e^A = Se^{\Sigma}S^{-1}$ avec S matrice formée par les vecteurs propres de A.
On a par définition $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$ donc $R = e^{At}R_0 = S$.
On peut écrire aussi en posant $S^{-1}R_0 = C$ que

$$R = c_1 e^{\lambda_1 t}V_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}V_1 + c_3 e^{\lambda_3 t}V_3$$

La condition initiale à $t = 0$ donne $c_1 = c_2 = c_3 = 1/3$ et

$$R(t) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\cos(\sqrt{3}t)\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\sin(\sqrt{3}t)\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ex 2 *Rotations et quaternions*
1)
(a) et (b) Il suffit de faire le calcul.
(c) Pour $q\bar{q}$ on utilise les régles de (a) et (b).
On a $q\bar{q} = w^2 - i^2x_1^2 - j^2x_2^2 - k^2x_3^2 - ijx_1x_2 - ikx_1x_3 - jix_2x_1 - jkx_2x_3 + ...$

(d) De même pour q_1q_2

$$\begin{aligned} q_1q_2 &= (w_1w_2 - x_1x_2 - y_1y_2 - z_1z_2) \\ &+ (w_1x_2 + x_1w_2 + y_1z_2 - z_1y_2) \\ &+ (w_1y_2 + y_1w_2 + z_1x_2 - x_1z_2) \\ &+ (w_1z_2 + z_1w_2 + x_1y_2 - y_1x_2) \end{aligned}$$

2)
(a) $r = \cos\theta/2 + k\sin\theta/2$, on a

$p = i(x(\cos(\theta/2)^2 - \sin(\theta/2)^2) - y2\cos(\theta/2)\sin(\theta/2)) + j(x2\cos(\theta/2)\sin(\theta/2) + y(\cos(\theta/2)^2 - \sin(\theta/2)^2) + kz.$

On retrouve la formule pour la rotation d'axe $0z$ et d'angle θ.
(b) On montre que pour $\xi = i\alpha + j\beta + k\gamma$, on a $\xi^2 = -1$.

$$r\xi\bar{r} = (\cos\theta/2, \xi\sin\theta/2)\xi(\cos\theta/2, -\xi\sin\theta/2) = \xi$$

(c) $r_2 = R_2(\pi/2) = \sqrt{2}/2 + j\sqrt{2}/2$ et $r_1 = R_1(\pi/2) = \sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$. On a $r_2r_1 = 1/2 + (i/\sqrt{3} + j/\sqrt{3} - k/\sqrt{3})\sqrt{3}/2$ donc $\theta = 2\pi/3$ et l'axe est $1/\sqrt{3}(1, 1, -1)$.

Ex 3
On écrit la forme quadratique sous la forme de somme de nombres au carré :

$$-x^2 - 5y^2 - 9z^2 - 4xy - 6xz - 8yz = -(x + 2y + 3z)^2 - (y - 2z)^2 + 4z^2$$

Il y a une solution, on peut prendre $x = -7/2$, $y = 1$ et $z = 1/2$.