Solution 20 : Forme quadratique et valeurs singulières

"survival kit"

- La **norme de la matrice** A est le nombre défini par
$$||A|| = \max_{x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||}.$$
On peut dire que $||A||$ est la borne de l'amplification due à la matrice A, car
$$||Ax|| \leq ||A|| ||x||$$
pour tout les vecteurs x.

- Soit A une matrice de taille $n \times m$:
  - $\dim(\mathrm{Ker}(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A)) = m$.
  - Les matrice $A^{\mathrm{T}}A$ et AA^{T} sont symètrique et semi-définie positive.
  - $\mathrm{Ker}(A^{\mathrm{T}}A) = \mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{rang}(A^{\mathrm{T}}A) = \mathrm{rang}(AA^{\mathrm{T}}) = \mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A^{\mathrm{T}})$.

- La **Décomposition en valeur singulière** : Toute matrice A de taille $m \times n$ peut être factorisé de la façon suivante :
$$A = U \ \Sigma \ V^{\mathrm{T}}$$
où la matrice Σ est diagonale, et U et V sont orthogonales.
Les colonnes de U $(m \times m)$ sont les vecteurs propres de AA^{T}, et les colonnes de V $(n \times n)$ sont les vecteurs propre de $A^{\mathrm{T}}A$.
Les r valeurs singulières de la matrice diagonale Σ (taille $m \times n$) sont les racines carrées des valeurs propres non nulles de AA^{T} ou $A^{\mathrm{T}}A$.
On peut remarquer que l'on a les relations suivantes sur les vecteurs propres u_i et v_j :
  - $Av_i = \sigma_i u_i$ pour $i = 1, ..., r$ et $Av_i = 0$ pour $i = r+1, ..., m$.
  - $A^{\mathrm{T}}u_i = \sigma_i v_i$ pour $i = 1, ..., r$ et $A^{\mathrm{T}}u_i = 0$ pour $i = r+1, ..., n$.

- **Les moindres carrés**
Soit le système sur-déterminé
$$Ax = b \qquad A \in \mathbf{R}^{n \times m}, b \in \mathbf{R}^n, \ n > m$$
Il faut trouver $x \in \mathbf{R}^m$ tel que $||r|| = ||b - Ax||$ soit minimale.
Une solution de ce problème est x solution du système
$$A^{\mathrm{T}}Ax = A^{\mathrm{T}}b$$
Si le rang de A est m, on a une solution unique à ce problème.
Si le rang de $A \ < \ m$, la n'est pas unique.
On peut aussi regarder le cas général où, il y a aucune condition entre n et m et le $\mathrm{rang}(A) = r$.
Comme il peut y avoir plusieurs solution qui minimise $||Ax - b||$, on choisit celle qui correspond à un $||x||$ le plus petit possible.
Si $A = U\Sigma V^{\mathrm{T}}$, on prend $x = Vy$ avec $y = \frac{c_i}{\sigma_i}$ et $c = U^{\mathrm{T}}b$.
Si on définit le speudo-inverse de A par $\tilde{A} = V\tilde{\Sigma}U^{\mathrm{T}}$ on a $x = \tilde{A}b$.
$\tilde{\Sigma}$ est une matrice diagonale définit par :
$$(\tilde{\sigma}_i) = 1/\sigma_i \quad \text{pour} \quad i = 1, r \quad \text{et} \quad (\tilde{\sigma}_i) = 0 \quad \text{pour} \quad i > r$$

Ex 1 *Forme quadratique: méthode de Gauss*

1)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{b}{a} & 1 \end{pmatrix} \ ; \ D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & ad - b^2 \end{pmatrix}$$

2)

(a)

$$Q(X) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + dx_2^2 = a(x_1 + \frac{b}{a}x_2^2)^2 + (d - \frac{b^2}{a})x_2^2$$

(b)

Cette forme quadratique s'écrit sous la forme $Q(Y) = ay_1^2 + (d - \frac{b^2}{a})y_2^2$ si on fait le changement de variable

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = L^{\mathrm{T}}Y$$

3)

On remarque que le second terme de D est $\mathrm{Det}(A)/a$ et on utilise l'**Ex 5** de la semaine 18

- Si $a > 0$ et $\mathrm{Det}(A)/a > 0$ alors $a > 0$ et $\mathrm{Det}(A) > 0$ et les deux valeurs propres de A sont positives.
- Si $a < 0$ et $\mathrm{Det}(A)/a < 0$ alors $a > 0$ et $\mathrm{Det}(A) > 0$ et les deux valeurs propres de A sont négatives.
- Si $a > 0$ et $\mathrm{Det}(A)/a < 0$ alors $\mathrm{Det}(A) < 0$ et une valeur propre de A est positive tandis que l'autre est négative.
- Si $a < 0$ et $\mathrm{Det}(A)/a > 0$ alors $\mathrm{Det}(A) < 0$ et une valeur propre de A est positive tandis que l'autre est négative.

On a bien que les élements diagonaux de D ont les mêmes signes que les valeurs propres de A.

Ex 2 *Matrice définie positive*

1)

On pose $A = LU = LD\tilde{U}$ avec $d_{ii} = u_{ii}$, $d_{ij} = 0$, $\tilde{u}_{ii} = 1$ et $\tilde{u}_{ij} = u_{ij}/u_{ii}$ si $u_{ii} \neq 0$.
On a $A^{\mathrm{T}} = \tilde{U}^{\mathrm{T}}DL^{\mathrm{T}} = A = LU$.
Donc $U = DL^{\mathrm{T}}$.

2)

comme A est définie positive les élements diagonaux de D sont positifs. On prend $R = L\sqrt{D}$.

3)

$$Q(x) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax = x^{\mathrm{T}}\frac{1}{2}A^{\mathrm{T}}Ax$$

Q est une forme quadratique car la matrice $A^{\mathrm{T}}A$ est symètrique de taille $n \times n$. Elle definie positive car $Q(x) > 0$ si $x \neq 0$ car A est de rang n.

2)

on pose

$$P(x) = \frac{1}{2}||Ax - b||^2 = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax - x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}b + \frac{1}{2}b^{\mathrm{T}}b$$

On pose x solution de $A^{\mathrm{T}}Ax = A^{\mathrm{T}}b$.
Soit y un vecteur quelconque, on a

$$P(y) - P(x) \quad = \quad \frac{1}{2}y^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ay - y^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}b - \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax + x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}b$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}y^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ay - y^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax + \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax \\
&= \frac{1}{2}(y-x)^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}A(y-x)
\end{aligned}
$$

On a $P(y) - P(x) = Q(y-x) > 0$ car Q définie positive et donc $P(y) > P(x)$ et le minimum de P est atteint pour x solution de $A^{\mathrm{T}}Ax = A^{\mathrm{T}}b$. On a $P_{\min} = \frac{1}{2}\left(||b||^2 - ||Ax||^2\right)$.
On retrouve la solution des moindres carrés qui minimise $||Ax - b||$, pour une matrice $A \in \mathbf{R}^{n\times m}$.

Ex 3 *Quotient de Rayleigh*
(a)

$$R(x) = \frac{x^{\mathrm{T}}Ax}{x^{\mathrm{T}}x} = \lambda_1 \ \text{ la plus petite valeur propre de } \ A$$

(b)

$$R(x) = \frac{x^{\mathrm{T}}Ax}{x^{\mathrm{T}}Mx} = \lambda_1$$

Ici λ solution du problème aux valeurs propres généralisées $Ax = \lambda Mx$.

Ex 4 *Décomposition en valeurs singulières*
1)
On laisse libre x et on exprime y et z en fonction de x. On obtient $y = 1$ et $z = 2 - x$.
2)

$$J(\alpha) = \alpha^2 + 1 + 4 + \alpha^2 - 4\alpha = 2\alpha^2 - 4\alpha + 5 = 2(\alpha-1)^2 + 3$$

Le minimum est atteind pour $\alpha = 1$ et $X_s = (1,1,1)$.
3)
On calcule les valeurs propres de AA^{T} :

$$AA^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

On trouve $\lambda_1 = 2$ et $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$ et $\lambda_2 = 4$ et $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$. Les vecteurs de la matrice V peuvent être calculés par $v_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}A^{\mathrm{T}}u_i$ et $Av_i = 0$. Donc

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ V = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \ ; \ \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

4)
On pose $X' = (x', y', z')$ et on doit résoudre $U\Sigma X' = b = (3,1)^{\mathrm{T}}$. Par conséquent

$$x' = \frac{1}{\sigma_1}u_1^{\mathrm{T}}b = 1 \ ; \ y' = \frac{1}{\sigma_2}u_2^{\mathrm{T}}b = \sqrt{2}$$

et z' qui est libre.
5)
Comme $X = VX'$ on a $||X||^2 = X'TV^{\mathrm{T}}VX' = X'TX' = ||X'||^2$. le minimum de $||X||^2 = 1 + 2 + z'^2 = 3 + z'^2$ est atteind pour $z' = 0$.
On pose $X = VX'$ et sachant que $z' = 0$, on a directement $X = (1,1,1)$.