Solution 22 : Norme et conditionnement, Integrale double

Ex 1 *conditionnement de Matrice*

1)

Il faut montrer que :

- $||A|| > 0$, sauf si A est la matrice nulle.
- si α est un scalaire alors $||\alpha A|| = |\alpha| \; ||A||$.
- l'inégalité triangulaire : $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$.

1) Par construction, si $||A|| = 0$, alors $||Ax|| = 0$, pour tout x tel que $||x|| = 1$.
Comme $||.||$ dans $\mathbf{R}^n$ est une norme cela veut dire que $Ax = 0$ pour tout les x tel que $||x|| = 1$ et donc le noyau de A est $\mathbf{R}^n$ et donc A est la matrice nulle.
2) on a $||\alpha Ax|| = |\alpha| \; ||Ax||$ et donc $\sup ||\alpha Ax|| = |\alpha| \sup ||Ax||$.
3) On a $||(A + B)x|| = ||Ax + Bx|| \leq ||Ax|| + ||Bx||$ et donc $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$.

On a $\frac{||Ax||}{||x||} = ||A\frac{x}{||x||}|| \leq \sup_{||x||=1} ||Ax|| = ||A||$ et donc $||Ax|| \leq ||A|| \; ||x||$.

On $||ABx|| \leq ||A|| \; ||Bx|| \leq ||A|| \; ||B|| \; ||x||$ en utilisant la propriété que l'on vient de montrer.

On peut remarquer de plus que $\frac{||ABx||}{||x||} \leq ||A|| \; ||B||$ et par conséquent $||AB|| \leq ||A|| \; ||B||$.

2)

On a $A(X_0 + \delta X) = AX_0 + A\delta X_0 = Y + \delta Y$, donc $\delta X_0 = A^{-1}\delta Y$.
Donc $||\delta X_0|| \leq ||A^{-1}|| \; ||\delta Y||$. de même $||A|| \; ||X_0|| \geq ||Y||$. On multiplie les deux inégalités entre-elles et on a

$$\frac{||\delta X_0||}{||X_0||} \leq ||A|| \; ||A^{-1}|| \frac{||\delta X_0||}{||X_0||}$$

3)

On a $(A + \delta A)(X_0 + \delta X_0) = b$ qui s'écrit aussi $\delta A(X_0 + \delta X_0) + A\delta X_0 = 0$.
On obtient $\delta X_0 = -A^{-1}\delta A(X_0 + \delta X_0)$ d'où on tire la formule

$$\frac{||\delta X_0||}{||X_0 + \delta X_0||} \leq ||A^{-1}|| \; ||A|| \frac{||\delta A||}{||A||}$$

4)

Si A est une matrice symétrique alors A est diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles. On a les valeurs singulières de A qui sont égal à la valeur absolue des valeurs propre de A.
si λ est la valeur propre de A de plus grande valeur absolue, on a $||A|| = |\lambda|$. Si μ est la valeur propre ayant la plus petite valeur absolue , on a $||A^{-1}|| = 1/|\mu|$. Par conséquence :

$$cond(A) = |\lambda|/|\mu|$$

5)

Les valeurs propres de A sont $.01339312527, 2.986606875$. le conditionnement de A est ~ 222. On trouve (-10., -5.) Pour le premier système.
Pour l'autre système, on trouve (-1.25, 2.5).

Ex 2

La masse totale dans R est

$$M = \int_R \int f(x, y) \; dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \right] dx = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \; d\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\int_R\int xf(x,y)\ dxdy = \frac{4}{\pi}\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx = \frac{4}{3\pi}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M}\int_R\int yf(x,y)\ dxdy = \bar{x} = \frac{4}{3\pi}$$

pour des raisons de symètrie.

$$I_x = \int_R\int y^2 f(x,y)\ dxdy = \frac{\pi}{16} = I_y \qquad ; \qquad I_0 = I_x + I_y = \frac{\pi}{8}$$

Ex 3

On a si on passe en coordonnée polaire ($x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$), l'expression suivante

$$\int_R\int f(x,y)\ dxdy = \int_{r=0}^{3}\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} 2\ r(\sin(\theta)+\cos(\theta))\ rd\theta\ dr = 2\int_0^3 r^2 dr \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\sin(\theta)+\cos(\theta)\ d\theta = 36$$

Rq: on a $dx\ dy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|\ dr\ d\theta = rd\theta\ dr$