UE Fondements 3 : Partie algèbre

Ann Lemahieu

Chapitre 0

Introduction

Soient V et W des espaces vectoriels sur un corps K et soit $f : V \longrightarrow W$ une application linéaire. Soit $n = dim_K V$ et $m = dim_K W$. Après le choix d'une base $\mathcal{V} = (e_1, \ldots, e_n)$ de V et une base $\mathcal{W} = (u_1, \ldots, u_m)$ de W, on peut représenter l'application f par la matrice

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{W}, \mathcal{V}) = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n} =: A \in \mathcal{M}_{m,n}(K),$$

où les nombres $a_{i,j}$ sont définis par les égalités

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} u_i, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

En effet, en termes de coordonnées on trouve ainsi pour $v = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \in V$:

$$f(v) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right) u_i.$$

Conclusion : Si ${}^t(x_1, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées du vecteur v dans la base $\mathcal{V}$, alors les coordonnées du vecteur $f(v)$ dans la base $\mathcal{W}$ sont $\mathcal{M}(f, \mathcal{W}, \mathcal{V})^t(x_1 \ldots x_n)$.

Soient $\mathcal{V}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ une autre base de V et soit $\mathcal{W}' = (u'_1, \ldots, u'_m)$ une autre base de W. Soient $P \in GL_n(K)$ et $Q \in GL_m(K)$ les matrices de passage de $\mathcal{V}$ à $\mathcal{V}'$, resp. de $\mathcal{W}$ à $\mathcal{W}'$, i.e.

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j} e_i \qquad \text{et} \qquad u'_j = \sum_{i=1}^{m} q_{i,j} u_i.$$

On rappelle que si ${}^t(x'_1, \ldots, x'_n)$ sont les coordonnées de v dans la base $\mathcal{V}'$, alors $P^t(x'_1, \ldots, x'_n)$ sont les coordonnées de v dans la base $\mathcal{V}$. De même, si ${}^t(y'_1, \ldots, y'_m)$ sont les coordonnées de w dans la base $\mathcal{W}'$, alors $Q^t(y'_1, \ldots, y'_n)$ sont les coordonnées de w dans la base $\mathcal{W}$.
Alors la matrice de f dans les bases $\mathcal{V}'$ et $\mathcal{W}'$ est $Q^{-1}AP$ car si les coordonnées d'un vecteur v sont $(x'_1, \ldots, x'_n)$ dans la base $\mathcal{V}'$, alors les coordonnées de v dans la base $\mathcal{V}$ sont $P^t(x'_1, \ldots, x'_n)$. Les coordonnées de $f(v)$ dans la base $\mathcal{W}$ sont alors $AP^t(x'_1, \ldots, x'_n)$ et dans la base $\mathcal{W}'$ les coordonnées de $f(v)$ sont donc

$$Q^{-1}AP^t(x'_1, \ldots, x'_n).$$

Si les deux espaces vectoriels V et W coïncident, alors f est appelé un endomorphisme et dans ce cas $P = Q$. Dans ce cours on se pose la question si et comment on peut choisir une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit 'simple'. Le rêve ultime est le cas où il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale. Si une telle matrice P existe, alors on dit

que f ou A est diagonalisable. Nous allons caractériser ces applications linéaires et également construire de nouvelles bases dans lesquelles la matrice de l'application linéaire est diagonale, si l'application est diagonalisable.
Nous allons ensuite étudier les espaces vectoriels réels munis d'un produit scalaire. Nous allons montrer que si A est une matrice symétrique réelle, alors A est diagonalisable.
Nous conclurons ce cours en donnant des exemples.

Les mots clés dans l'étude de la diagonalisation (plus générale de la réduction, i.e. la recherche aux bases dans lesquelles la matrice de l'endomorphisme devient le plus simple possible) sont les valeurs propres et les vecteurs propres. Ces notions seront étudiées dans le Chapitre 2. Elles nous permettrons de caractériser les endomorphismes diagonalisables et de déterminer effectivement des bases, si elles existent, dans lesquelles la matrice est diagonale. Les valeurs propres seront les racines d'un polynôme qui sera calculé comme un déterminant. Ceci nous mène dans le Chapitre 1 à étudier d'abord plus profondément le déterminant.
Dans le troisième chapitre nous étudierons les espaces Euclidiens, en particulier l'espace $\mathbb{R}^n$ avec le produit scalaire standard. Dans ce contexte, on pourra choisir des matrices de passage P qui sont appelées orthogonales. En effet, pour toute matrice symétrique réelle il est possible de choisir une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice est diagonale. Ce résultat sera montré dans le Chapitre 4.

Certains compléments à ce cours sont vus dans le cours Compléments d'Algèbre. Dans l'UE Algèbre du Semestre 4, on continuera à étudier la réduction des endomorphismes.
Les prérequis de ce cours sont contenus dans le cours Fondements Mathématiques 2. Voir

https ://math.unice.fr/ phm/enseignement.html

pour le support et des vidéos des cours Fondements Mathématiques 1 et 2.