Chapitre 1

Déterminants

Soit K un corps.

I Rappels

Définition 1 *Soit* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(K)$*. Le déterminant* $det(A)$ *de* A *est l'élément* $ad-bc$ *de* K*.*

Définition 2 *Soit* $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(K)$*. Le déterminant* $det(A)$ *de* A *est l'élément* $a_{1,1}det(A_{1,1})-a_{2,1}det(A_{2,1})+a_{3,1}det(A_{3,1})$ *de* K*, où* $A_{i,j}$ *est la matrice obtenue en enlevant à* A *sa i-ème ligne et sa j-ème colonne.*

Proposition 1 *Soient* $A, B \in \mathcal{M}_2(K)$ *(resp.* $\mathcal{M}_3(K)$*). Alors :*
- $det(AB) = det(A)det(B)$
- $det(I_2) = det(I_3) = 1$
- $det({}^tA) = det(A)$
- *La matrice* A *est inversible si et seulement si* $det(A) \neq 0$*.*

II Déterminant d'une matrice $n \times n$

1 Définition

Nous allons définir une fonction déterminant sur les matrices carrées de taille $n \times n$ telle que $det(A) = 0$ si et seulement si A n'est pas inversible. On peut facilement généraliser la formule récursive du déterminant des matrices 3×3. Par contre, montrer des propriétés du déterminant devient compliqué quand la taille des matrices augmente. On donne préférence à la définition suivante.

Notation : Nous allons utiliser la notation $A = (A^1|\dots|A^n)$ pour la matrice A, où les A^i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont les colonnes de la matrice A.

Théorème 2 *Soit* K *un corps. Pour tout* $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$*, il existe une unique fonction*

$$det : \mathcal{M}_n(K) \longrightarrow K,$$

appelée le déterminant, satisfaisant les conditions suivantes :

1. *(Multilinéarité) Soit* $A = (A^1|\dots|A^n)$ *et soit* $A^j = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$*, avec* C_1, C_2 *des vecteurs colonnes dans* K^n *et* λ_1, λ_2 *des scalaires dans* K*, pour un certain* $j \in \{1, \dots, n\}$*. Alors*

$$det(A) = \lambda_1 det(A^1|\dots|A^{j-1}|C_1|\dots|A^n) + \lambda_2 det(A^1|\dots|A^{j-1}|C_2|\dots|A^n).$$

2. *Supposons que* $A = (A^1|\dots|A^n)$ *et que* $A^j = A^{j+1}$ *pour un certain* $j \in \{1, \dots, n-1\}$*. Alors*

$$det(A) = 0.$$

3. *Le déterminant de la matrice identité* I_n *de* $\mathcal{M}_n(K)$ *vaut* 1*, pour tout* $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$*.*

Preuve. Nous montrons seulement l'existence.
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et notons $A_{i,j}$ pour la matrice obtenue à partir de A en enlevant la i-ème ligne et la j-ème colonne. Pour montrer l'existence, nous montrons que la formule récursive

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1,j} det(A_{1,j})$$

vérifie les conditions du Théorème 2. Ceci est appelé le développement du déterminant de A par rapport à la première ligne.
L'unicité sera démontrée dans l'UE Compléments d'Algèbre. Elle suivra d'une formule non-récursive pour le déterminant. □

Exemple 1 *Développement du déterminant par rapport à la première ligne d'une matrice* 4×4

Pour le calcul d'un déterminant $n \times n$ on a $n!$ termes. Cette méthode de calcul n'est pas efficace. On va plutôt utiliser des propriétés de la fonction déterminant pour calculer le détermnant.

2 Propriétés et calcul du déterminant

Nous montrons que le déterminant a les propriétés suivantes :

Corollaire 3

1. *Supposons que la matrice* A' *est obtenue à partir de la matrice* A *après avoir permuté deux colonnes adjacentes. Alors*

$$det(A') = -det(A).$$

2. *Supposons que la matrice* A' *est obtenue à partir de la matrice* A *après avoir permuté deux colonnes quelconques. Alors*

$$det(A') = -det(A).$$

3. *Supposons que la matrice* A *a deux colonnes identiques. Alors*

$$det(A) = 0.$$

La formule non-récursive utilisée pour montrer que l'application dans le Théorème 2 offre la possibilité pour montrer de façon élégante les propriétés suivantes (qui seront démontrées dans l'UE Compléments d'Algèbre) :

Corollaire 4

1. *Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$, on a que*
$$det(A) = det({}^tA).$$

2. *Les formules suivantes pour le déterminant sont aussi valables :*
Pour tout $i, 1 \leqslant i \leqslant n$, on a
$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} det(A_{i,j}).$$
Ceci est appelé le développement du déterminant par rapport à la i-ème ligne.
Pour tout $j, 1 \leqslant j \leqslant n$, on a
$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} det(A_{i,j}).$$
Ceci est appelé le développement du déterminant par rapport à la j-ème colonne.

3. *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$, on a que*
$$det(AB) = det(A)det(B).$$

Exemple 2 *Déterminant d'une matrice triangulaire supérieure ou triangulaire inférieure.*

Comme le déterminant d'une matrice coïncide avec le déterminant de la transposée, l'application déterminant est aussi multilinéaire dans les lignes de la matrice. En particulier, on a :

Corollaire 5 1. *Supposons que la matrice A' est obtenue à partir de la matrice A après avoir permuté deux lignes quelconques. Alors*
$$det(A') = -det(A).$$

2. *Si la matrice A' est obtenue à partir de la matrice A en multipliant une ligne par un scalaire λ, alors*
$$det(A') = \lambda det(A).$$

3. *Si la matrice A' est obtenue à partir de la matrice A en additionnant un multiple d'une ligne de A à une autre ligne de A, alors*
$$det(A') = det(A).$$

Nous savons donc comment le déterminant se comporte par rapport aux opérations élémentaires de Gauss. Rappelons qu'avec des opérations élémentaires on peut échelonner toute matrice carrée vers une matrice triangulaire supérieure et que le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est simplement le produit des éléments sur la diagonale !

La multilinéarité du déterminant nous permet aussi de montrer le résultat suivant très pratique :

Corollaire 6 *Supposons que les colonnes de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ sont linéairement dépendantes. Alors $det(A) = 0$.*

III Applications du déterminant

1 Solutions de systèmes linéaires

Nous résumons quelques résultats concernant les systèmes linéaires à n équations et n inconnues. Nous introduisons d'abord la notion de rang d'une matrice.
On rappelle la notion de rang d'une famille de vecteurs.

Définition 3 *Soient E un espace vectoriel et $u_1, \dots, u_p$ des vecteurs de E. On appelle rang de la famille $\{u_1, \dots, u_p\}$ la dimension de l'espace vectoriel $Vect(u_1, \dots, u_p)$.*

Définition 4 *Soit A une matrice dans $\mathcal{M}_{m,n}(K)$. On appelle le rang des lignes de A le rang de la famille constituée des m vecteurs dans K^n qui forment les lignes de A. On appelle le rang des colonnes de A le rang de la famille constituée des n vecteurs dans K^m qui forment les colonnes de A.*

Remarquons que le rang des lignes d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ est aussi le nombre de pivots obtenu dans la procédure d'échelonnage en lignes, et est donc le nombre de variables liées du système homogène $Ax = 0$. Comme l'espace des solutions du système $Ax = 0$ a pour dimension le nombre de variables libres, on a que

$$\text{rang des lignes de } A = n - \text{ nombre de variables libres.}$$

Soit $f : K^n \longrightarrow K^m$ l'application linéaire qui envoie x sur Ax. Alors l'espace des solutions du système $Ax = 0$ est le noyau de f et on trouve

$$\text{rang des lignes de } A = n - dim(Ker(f)).$$

Par le théorème du rang on trouve alors

$$\text{rang des lignes de } A = dim(Im(f)).$$

Comme le rang des colonnes de A est la dimension de $Im(f)$, on trouve finalement que

$$\text{rang des lignes de } A = \text{rang des colonnes de } A,$$

ce qui justifie la définition suivante.

Définition 5 *Soit A une matrice. Le rang de A est le rang des lignes ou de colonnes de A.*

Théorème 7 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) Le système linéaire $Ax = y$ a au moins une solution pour tout $y \in K^n$,

(ii) Les colonnes de A engendrent K^n,

(iii) Les lignes de A engendrent K^n,

(iv) Le système linéaire $Ax = 0$ a comme unique solution $x = 0$,

(v) Les colonnes de A sont linéairement indépendantes,

(vi) Les lignes de A sont linéairement indépendantes,

(vii) Le système linéaire $Ax = y$ a exactement une solution pour tout $y \in K^n$,

(viii) Les colonnes de A constituent une base pour K^n,

(ix) Les lignes de A constituent une base pour K^n,

(x) Le rang de la matrice A est égal à n,

(xi) La matrice A est inversible,

(xii) Le déterminant de A est non nul,

(xiii) Le déterminant de ${}^tA$ est non nul.

Intermezzo : calcul de l'inverse d'une matrice.

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(K)$. Si A est inversible, alors il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $AB = I_n$. Notons $B = (x_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Soit $x_j =^t (x_{1,j}, x_{2,j}, \dots, x_{n,j})$ la n-ème colonne de B. Soit e_j la j-ème colonne de la matrice identité I_n. On peut donc trouver la matrice B en résolvant les systèmes $Ax_j = e_j, 1 \leqslant j \leqslant n$. Au lieu d'écrire n systèmes, on écrit

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & , & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & , & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} & , & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

En échelonant le système jusqu'à ce que des opérations élémentaires transforment la matrice A en la matrice identité, les solutions apparaissent à droite. En effet, si l'échelonage donne

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & , & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & , & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & , & \vdots \\ a_{j,1} & a_{j,2} & \dots & a_{j,n} & , & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & , & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} & , & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & , & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & , & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & , & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & , & \alpha_j \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & , & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & , & \alpha_n \end{pmatrix},$$

alors on trouve

$$x_{1,j} = \alpha_1, x_{2,j} = \alpha_2, \dots, x_{n,j} = \alpha_n.$$

2 Calculs d'aires

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ et deux vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^2$. La valeur absolue du déterminant $det(u, v)$ est égale à l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs u et v.

Soient u, v et w des vecteurs dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. Alors la valeur absolue du déterminant $det(u, v, w)$ est égale au volume du parallélépipède engendré par u, v et w.