Chapitre 2

Réduction des endomorphismes : endomorphismes diagonalisables

Donné un endomorphisme f d'un espace vectoriel E de dimension finie, nous nous intéressons à la question si f peut être représenté par une matrice diagonale dans une base bien choisie. Si ceci est possible, alors on dit que f est diagonalisable. Cette question revient à l'étude des matrices diagonalisables : une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est dite diagonalisable s'il existe une matrice inversible P telle que PAP^{-1} soit une matrice diagonale. Nous allons donner une condition suffisante et nécessaire pour qu'une matrice soit diagonalisable et, si elle est diagonalisable, nous allons pouvoir donner une base dans laquelle la matrice devient une matrice diagonale. Ces bases seront composées de vecteurs appelés vecteurs propres. Les scalaires sur la diagonale de la matrice diagonale trouvée seront les valeurs propres.

I Vecteurs propres, valeurs propres

Exemple 3 *Symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à un plan parallèlement à une droite.*

Définition 6 *Soit $f \in \mathcal{L}_K(E)$ un endomorphisme de l'espace vectoriel E. Un vecteur $v \in E$ est dit vecteur propre de f si*

1. $v \neq 0$;
2. $\exists \lambda \in K : f(v) = \lambda v$.

Le scalaire $\lambda \in K$ est dit valeur propre correspondante à v. L'espace propre E_λ est l'ensemble des vecteurs de E pour lesquels $f(v) = \lambda v$.

Exemple 4 *Vecteurs propres et valeurs propres pour l'exemple 3.*

Proposition 8 *Soit λ une valeur propre de l'endomorphisme f de l'espace vectoriel E. Alors l'espace propre $E_\lambda = Ker(f - \lambda Id_E)$ est un sous-espace vectoriel de E.*

L'intérêt des vecteurs propres s'explique par le résultat suivant.

Théorème 9 *Soit $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Alors f est diagonalisable si et seulement si il existe une base de E formée de vecteurs propres.*

II Polynôme caractéristique

Dans cette section on part à la recherche des valeurs propres et des espaces propres d'un endomorphisme $f : E \longrightarrow E$ donné. On suppose que E est de dimension finie sur le corps K. On verra que les valeurs propres sont simplement les racines d'un polynôme, appelé polynôme caractéristique, qu'on peut définir aussi bien pour les matrices carrés que pour les endomorphismes. Ce polynôme caractéristique se calcule comme le déterminant d'une matrice.

Remarque 1 *Le déterminant peut aussi être défini pour les endomorphismes : soit f un endomorphisme, alors le déterminant de la matrice de f ne dépend pas de la base choisie. En effet, soient $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $P \in GL_n(K)$, alors $det(PAP^{-1}) = det(P)$.*

Définition 7 *Soient A et B deux matrices dans $\mathcal{M}_n(K)$. S'il existe une matrice inversible $P \in GL_n(K)$ telle que $B = P^{-1}AP$, alors A et B sont dites d'être des matrices semblables.*

Autrement dit, deux matrices semblables ont même déterminant.

Soit maintenant λ une valeur propre de f. Il existe donc un vecteur $v \in E, v \neq 0$, tel que $f(v) = \lambda v$, c'est-à-dire $(f - \lambda id)(v) = 0$. Comme $v \neq 0$, cela signifie que l'endomorphisme $(f - \lambda id)$ n'est pas injectif. Comme E est de dimension finie, cela est équivalent à dire que l'application $(f - \lambda id)$ n'est pas inversible (utilisant le théorème du rang) ou encore que $det(f - \lambda id) = 0$ (par le Theorème 7).

Si $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, et

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

alors λ est donc une valeur propre de f si et seulement si

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} - \lambda & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

En développant ce déterminant, on trouve une équation du type :

$$(-1)^n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0,$$

dont les racines dans K sont les valeurs propres de f.
On trouve ensuite les espaces propres de f en calculant les noyaux des endomorphismes $f - \lambda id$, où λ est une valeur propre de f. En effet, on trouve les coordonnées des vecteurs propres dans la base $\mathcal{E}$ on résolvant le système

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} - \lambda & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} & , & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda & \ldots & a_{2,n} & , & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & , & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} - \lambda & , & 0 \end{pmatrix}.$$

Vu que la recherche des valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme peut se faire au niveau des matrices, on introduit de façon analogue les notions de valeur propre et de vecteur propre pour les matrices.

Définition 8 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On appelle polynôme caractéristique P_A de A le polynôme de $K[x]$ défini par $P_A(x) = det(A - xI_n)$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle polynôme caractéristique P_f de f le polynôme de $K[x]$ défini par $P_f(x) = det(f - xId)$.*

Remarque 2 *Notons que nous avons défini le déterminant pour les matrices dont les coefficients appartiennent à un corps. On peut définir le déterminant de la même façon pour les matrices à coefficients dans un anneau, comme $K[x]$, vu que le calcul du déterminant se fait en utilisant l'addition et la multiplication.*

Définition 9 *On appelle valeur propre de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ tout scalaire de K qui est racine de $P_A(x)$ et on appelle vecteur propre de A avec valeur propre λ correspondante tout vecteur non nul v de K^n pour lequel $Av = \lambda v$. On appelle spectre de $f \in \mathcal{L}(E)$ ou de $A \in \mathcal{M}_n(K)$ l'ensemble des valeurs propres de f resp. A.*

Exemple 5

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors 1 et -1 sont des valeurs propres de A, car

$$A\begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} \qquad et \qquad A\begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}.$$

On conclut que $\begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}$ est vecteur propre pour la valeur propre 1, pour tout $b \neq 0$, et que $\begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}$ est vecteur propre pour la valeur propre -1, pour tout $b \neq 0$.

Lemme 10 *Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.*

Preuve. En effet, soit A et B deux matrices semblables. Alors il existe $P \in GL_n(K)$ tel que $B = P^{-1}AP$. On trouve alors

$$\begin{aligned} P_B(x) &= det(B - xid) \\ &= det(P^{-1}AP - xI_n) \\ &= det(P^{-1}AP - xP^{-1}I_nP) \\ &= det(P^{-1}(A - xI_n)P) \\ &= det(P^{-1})det(A - xI_n)det(P) \\ &= det(A - xI_n) \\ &= P_A(x). \end{aligned}$$

□

Définition 10 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Le polynôme caractéristique de la matrice de f dans une base $\mathcal{E}$ de E ne dépend pas de la base $\mathcal{E}$ choisie. On l'appelle polynôme caractéristique de f et on le note P_f.*

III Caractérisation des endomorphismes diagonalisables

Dans cette partie, on veut approfondir le résultat Théorème 9 qui dit qu'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si f a une base de vecteurs propres. Tous les énoncés pour les endomorphismes peuvent se formuler pour les matrices carrées.

Comme n vecteurs linéairement indépendants forment une base d'un espace vectoriel de dimension n, on a également que $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si f a n vecteurs propres linéairement indépendants.
Le résultat suivant donne une condition suffisante pour que des vecteurs propres de f soient linéairement indépendants.

Théorème 11 *Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des valeurs propres distinctes de l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ avec vecteurs propres correspondants $v_1, \dots, v_r$. Alors $v_1, \dots, v_r$ sont linéairement indépendants.*

Corollaire 12 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et E de dimension n sur K. Si le polynôme caractéristique P_f a n valeurs propres distinctes dans K, alors f est diagonalisable.*

Définition 11 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit $\lambda \in K$ une valeur propre de f. On appelle la multiplicité algébrique de λ la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique P_f de f. On appelle la multiplicité géométrique de λ la dimension de l'espace propre E_λ associé à λ.*

On peut définir ces notions de façon analogue pour les valeurs propres de matrices.

Proposition 13 *Soit λ une valeur propre d'un endomorphisme f, alors la multiplicité géométrique de λ est inférieure ou égale à la multiplicité algébrique de λ.*

Théorème 14 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Sont équivalents :*

1. *f est diagonalisable ;*
2. *P_f est scindé sur K, ce qui veut dire que $P_f(X)$ s'écrit :*

$$P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (X - \lambda_p)^{\alpha_p},$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in K$ et $n = \alpha_1 + \dots + \alpha_p$,
et pour toute racine λ_i de P_f on a que la multiplicité algébrique et la multiplicité géométrique de λ_i coïncident.

Pour pouvoir décider si un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable, nous allons déterminer les multiplicités géométriques $dim(E_\lambda)$ pour les valeurs propres de f. Rappelons que le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme $f - \lambda Id_E \in \mathcal{L}(E)$ donne :

$$dim(E) = rang(f - \lambda Id_E) + dim(Ker(f - \lambda Id_E)) = rang(f - \lambda Id_E) + dim(E_\lambda).$$

Le calcul du rang de $f - \lambda Id_E$ nous permet donc de trouver $dim(E_\lambda)$.

Exemple 6

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

IV Applications

Exemple 7 *Résolution d'un système de suites récurrentes*

Exemple 8 *Système différentiel linéaire à coefficients constants*