Amphi 2 : Application des déterminants
Fondements Mathématiques 3

Ann Lemahieu

September 16, 2019

Définition/Théorème

Déterminant $n \times n$

Il existe une unique fonction $det : \mathcal{M}_n(K) \longrightarrow K$, telle que :

1. Soit $A = (A^1|\dots|A^n) \in \mathcal{M}_n(K)$ et soit $j \in \{1, \dots, n\}$.
   Si $A^j = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$, avec C_1, C_2 des vecteurs colonnes dans K^n et λ_1, λ_2 des scalaires dans K, alors $det(A) =$

   $$\lambda_1 det(A^1|\dots|A^{j-1}|C_1|\dots|A^n) + \lambda_2 det(A^1|\dots|A^{j-1}|C_2|\dots|A^n).$$

2. Supposons que $A = (A^1|\dots|A^n) \in \mathcal{M}_n(K)$ et que $A^j = A^{j+1}$ pour un certain $j \in \{1, \dots, n-1\}$. Alors

   $$det(A) = 0.$$

3. $det(I_n) = 1.$

Comportement du déterminant par rapport aux opérations élémentaires de Gauss

1. Supposons que la matrice A' est obtenue à partir de la matrice A après avoir permuté deux lignes quelconques. Alors
$$det(A') = -det(A).$$
2. Si la matrice A' est obtenue à partir de la matrice A en multipliant une ligne par un scalaire λ, alors
$$det(A') = \lambda det(A).$$
3. Si la matrice A' est obtenue à partir de la matrice A en additionnant un multiple d'une ligne de A à une autre ligne de A, alors
$$det(A') = det(A).$$

Autres propriétés

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$.

1. Supposons que la matrice A a deux colonnes/lignes identiques. Alors
$$det(A) = 0.$$
2. On peut développer le déterminant par rapport à n'importe quelle ligne/colonne.

Exemple 1 : calcul d'un déterminant

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Exemple 1 : calcul d'un déterminant

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2}{\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{=}} \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & -7 \end{vmatrix}$$

Exemple 1 : calcul d'un déterminant

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & -7 \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 + L_3}{=} \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Exemple 1 : calcul d'un déterminant

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2}{\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{=}} \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & -7 \end{vmatrix}$$

$$\overset{L_4 \leftarrow L_4 + L_3}{=} \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \quad 2 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

Exemple 1 : calcul d'un déterminant

$$
\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix}
\underset{L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2}{\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{=}}
\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & -7 \end{vmatrix}
$$

$$
\overset{L_4 \leftarrow L_4 + L_3}{=}
\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
= 2 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}
$$

$$
= -2 \cdot 7 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}
$$

Exemple 1 : calcul d'un déterminant

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix}
&\underset{L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2}{\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{=}}
\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} \\
&\overset{L_4 \leftarrow L_4 + L_3}{=}
\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 2 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} \\
&= -2 \cdot 7 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \\
&= -14
\end{aligned}
$$

Exemple 2 : calcul d'un déterminant

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ -2 & -3 & -6 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

Exemple 2 : calcul d'un déterminant

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ -2 & -3 & -6 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} \quad = \quad 3\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Exemple 2 : calcul d'un déterminant

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ -2 & -3 & -6 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} &= 3\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 0\end{aligned}$$

Rang d'une matrice

Rang d'une famille de vecteurs

Soient $u_1, \ldots, u_p$ des vecteurs d'un espace vectoriel E. Le rang de la famille $\{u_1, \ldots, u_p\}$ est la dimension de l'espace vectoriel $Vect(u_1, \ldots, u_p)$.

Rang des lignes / colonnes d'une matrice

Soit A une matrice dans $\mathcal{M}_{m,n}(K)$. On appelle le rang des lignes de A le rang de la famille constituée des m vecteurs dans K^n qui forment les lignes de A. On appelle le rang des colonnes de A le rang de la famille constituée des n vecteurs dans K^m qui forment les colonnes de A.

Rang - opérations élémentaires

Propriété

Les opérations élémentaires sur un ensemble de vecteurs d'un K-espace vectoriel E ne changent pas le sous-espace vectoriel engendré par cet ensemble de vecteurs.

La procédure d'échelonner en lignes sur A nous permet de lire facilement le rang des lignes de A !

La procédure d'échelonner en colonnes sur A (ou d'échelonner en lignes sur ${}^tA$) nous permet de lire facilement le rang des colonnes de A !

Exemple : calcul du rang des lignes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Exemple : calcul du rang des lignes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 9 \end{pmatrix} \underset{\sim}{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -9 \\ 0 & -1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Exemple : calcul du rang des lignes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 9 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -9 \\ 0 & -1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le rang des lignes de A est le nombre de pivots de la matrice échelonnée et est donc 2.

Exemple : calcul du rang des colonnes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Exemple : calcul du rang des colonnes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 9 \end{pmatrix} \quad \underset{\sim}{C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Exemple : calcul du rang des colonnes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 9 \end{pmatrix} \underset{\sim}{C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{C_4 \leftarrow C_4 - 4C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -9 \\ 0 & -1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Exemple : calcul du rang des colonnes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 9 \end{pmatrix} \underset{\sim}{C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{C_4 \leftarrow C_4 - 4C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -9 \\ 0 & -1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\underset{C_3 \leftarrow C_3 + C_2}{\overset{C_4 \leftarrow C_4 + 9C_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le rang des colonnes de A est le nombre de pivots en colonnes de la matrice échelonnée en colonnes et est donc 2.

Rang d'une matrice

Théorème

Soit A une matrice dans $\mathcal{M}_{m,n}(K)$. Alors le rang des lignes de A est égal au rang des colonnes de A.

Définition

Soit A une matrice dans $\mathcal{M}_{m,n}(K)$. Le rang de A est le rang des lignes/ rang de colonnes de A.

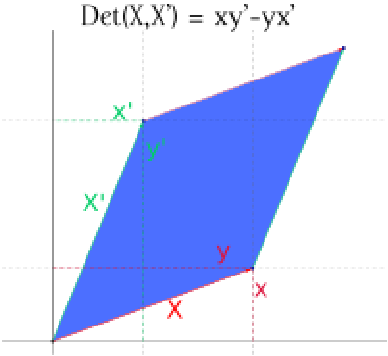
Systèmes linéaires à matrices carrées - Résumé

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Les énoncés suivants sont équivalents :

(i) Le système linéaire $Ax = y$ a au moins une solution pour tout $y \in K^n$,
(ii) Les colonnes de A engendrent K^n,
(iii) Les lignes de A engendrent K^n,
(iv) Le système linaire $Ax = 0$ a comme unique solution $x = 0$,
(v) Les colonnes de A sont linéairement indépendantes,
(vi) Les lignes de A sont linéairement indépendantes,
(vii) Le système linéaire $Ax = y$ a exactement une solution pour tout $y \in K^n$,
(viii) Les colonnes de A constituent une base pour K^n,
(ix) Les lignes de A constituent une base pour K^n,
(x) Le rang de la matrice A est égal à n,
(xi) La matrice A est inversible,
(xii) Le déterminant de A est non nul.

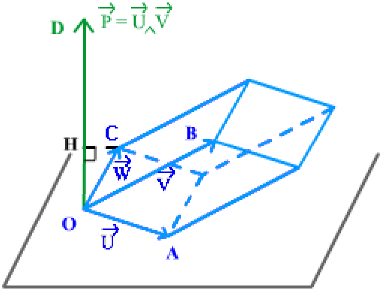
Aire parallélogramme

Soient $u, v \in \mathbb{R}^2$ deux vecteurs. La valeur absolue du déterminant $det(u, v)$ est égale à l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs u et v.



Volume parallélépipède

Soient u, v et w des vecteurs dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. La valeur absolue du déterminant $det(u, v, w)$ est égale au volume du parallélépipède engendré par les vecteurs u, v et w.



Inverse d'une matrice

Si $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ est inversible, alors il existe une matrice $B = (x_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \dots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \dots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \dots & x_{n,n} \end{pmatrix} = I_n.$$

Inverse d'une matrice

On a $AB = I_n$ sii

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{2,1} \\ \vdots \\ x_{n,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \\ \vdots \\ x_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Inverse d'une matrice

On simplifie la notation :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & , & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & , & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} & , & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

On échelonne le système jusqu'à ce que des opérations élémentaires sur les lignes transforment la matrice A en la matrice identité, les solutions apparaissent à droite !

$$\sim (I_n, A^{-1})$$

Test

Quel est le rang des familles suivantes dans $\mathbb{R}^4$?

1. $(1,0,0,0),(1,2,0,0),(1,2,3,0)$
2. $(1,0,0,0),(0,0,0,0),(1,2,3,0),(1,2,3,4)$
3. $(2,1,4,3),(2,1,2,0)$

Test

Soit $\mathcal{F} = \{v_1, \ldots, v_r\}$ une famille de vecteurs dans un espace vectoriel E de dimension n. Quels énoncés sont vrais ?

1. Si $\mathcal{F}$ est libre, alors $r = n$;
2. Si $\mathcal{F}$ est libre, alors $r \leq n$;
3. $v \in E$ est une combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_r$ si et seulement si $rang(\mathcal{F}) = rang(\mathcal{F} \cup \{v\})$.
4. Tout vecteur v de E est une combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_r$ si et seulement si $r = n$.

Test

Soit A une matrice de taille $m \times n$, avec $0 < m \leq n$. Quels énoncés sont vrais ?

1. $rang(A) \leq nm$;
2. $rang(A) \leq n + m$;
3. $rang(A) \leq n$;
4. $rang(A) \leq m$;
5. $rang(A) \leq n - m$.

Test

Soit A une matrice de taille $m \times n$. Quels énoncés sont vrais ?

1. $rang(A) = rang({}^tA)$;
2. $rang(A) = max(m, n)$ si et seulement si A est inversible ;
3. $rang(A) = k$ si et seulement si A a k lignes linéairement indépendantes ;
4. $rang(A) = k$ si et seulement si A a k colonnes linéairement indépendantes.

Test

Les nombres $136, 221$ et 595 sont divisibles par 17. Montrer, sans le calculer, que le déterminant de

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

est divisible par 17.