Amphi 2 : Réduction des endomorphismes
Fondements Mathématiques 3

Ann Lemahieu

September 23, 2019

Définitions

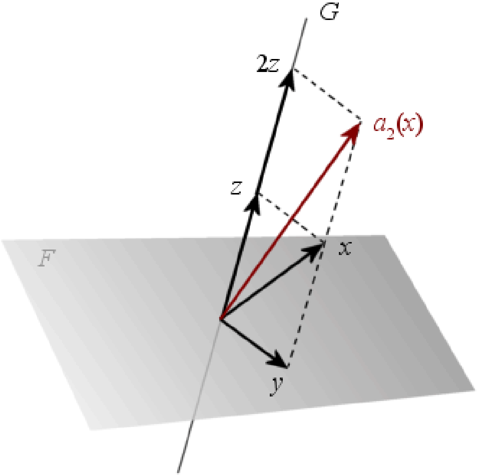
Endomorphisme diagonalisable

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}_K(E)$. On dit que f est diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est une matrice diagonale.

Matrice diagonalisable

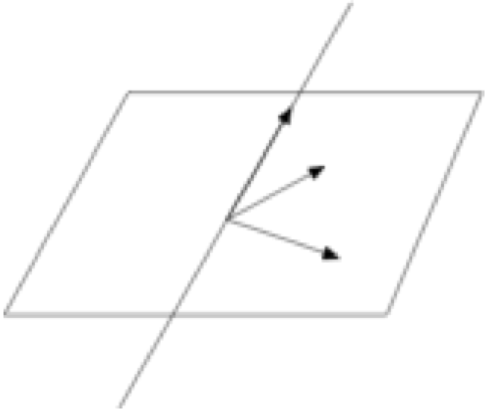
Soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(K)$. On dit que A est diagonalisable s'il existe une matrice inversible $P \in GL_n(K)$ telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale.

Exemple : projection sur un plan



Exemple : projection sur un plan

Que devient la matrice de la projection dans cette base ?



Définition

Vecteur propre, valeur propre

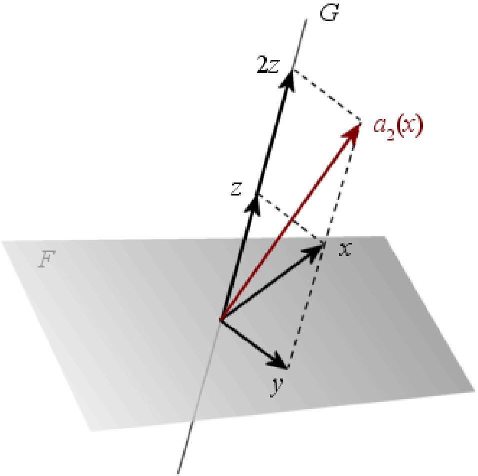
Soit $f \in \mathcal{L}_K(E)$ un endomorphisme de l'espace vectoriel E. Un vecteur $v \in E$ est dit vecteur propre de f si

1. $v \neq 0$;
2. $\exists \lambda \in K : f(v) = \lambda v$.

Le scalaire $\lambda \in K$ est dit valeur propre correspondante à v.

Exemple : projection sur un plan

Quels sont les vecteurs propres ? Les valeurs propres ?



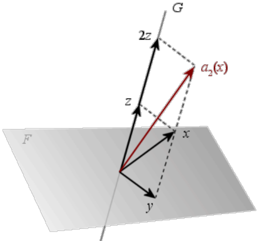
Espace propre

Définition

Soit λ une valeur propre d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}_K(E)$.
L'espace propre E_λ est l'ensemble des vecteurs de E pour lesquels $f(v) = \lambda v$.

Proposition

Soit λ une valeur propre d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}_K(E)$. Alors l'espace propre E_λ est un sous-espace vectoriel de E.



Endomorphismes diagonalisables

Théorème

Soit $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Alors f est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E formée de vecteurs propres.

Matrices semblables

Définition

Soient A et B deux matrices dans $\mathcal{M}_n(K)$. S'il existe une matrice inversible $P \in GL_n(K)$ telle que $B = P^{-1}AP$, alors A et B sont dites d'être des matrices semblables.

Lemme

Deux matrices semblables ont même déterminant.

Définition

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Le déterminant de la matrice de f ne dépend pas de la base choisie. On l'appelle alors le déterminant de f.

Valeurs propres

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie.

$$\lambda \in K \text{ est valeur propre de } f \in \mathcal{L}(E)$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists v \in E, v \neq 0, \text{ tel que } f(v) = \lambda v$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists v \in E, v \neq 0 \text{ tel que } (f - \lambda id)(v) = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$(f - \lambda id) \text{ n'est pas injectif}$$
$$\Updownarrow \ (dim(E) \text{ est finie !})$$
$$(f - \lambda id) \text{ n'est pas inversible}$$
$$\Updownarrow$$
$$det(f - \lambda id) = 0$$

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'endomorphisme qui dans la base canonique est représenté par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Alors $det(f - \lambda id) = det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6.$

Les valeurs propres de f sont 2 et 3.

Définition

Polynôme caractéristique d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On appelle polynôme caractéristique P_A de A le polynôme de $K[x]$ défini par $P_A(x) = det(A - xI_n)$.

Lemme

Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle polynôme caractéristique P_f de f le polynôme de $K[x]$ défini par $P_f(x) = det(f - xId)$.