Amphi 3 - partie 1 : Caractérisation des endomorphismes diagonalisables et applications Fondements Mathématiques 3

Ann Lemahieu

September 23, 2019

Rappels

Endomorphisme diagonalisable

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}_K(E)$. On dit que f est diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est une matrice diagonale.

Matrice diagonalisable

Soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(K)$. On dit que A est diagonalisable s'il existe une matrice inversible $P \in GL_n(K)$ telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale.

Rappels

Vecteur propre, valeur propre

Soit $f \in \mathcal{L}_K(E)$ un endomorphisme de l'espace vectoriel E. Un vecteur $v \in E$ est dit vecteur propre de f si

1. $v \neq 0$;
2. $\exists \lambda \in K : f(v) = \lambda v$.

Le scalaire $\lambda \in K$ est dit valeur propre correspondante à v.

Rappels

$$f \in \mathcal{L}(E) \text{ est diagonalisable}$$
$$\Updownarrow$$
$$E \text{ a une base de vecteurs propres de } f$$

Rappels

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie.

$$\lambda \in K \text{ est valeur propre de } f \in \mathcal{L}(E)$$
$$\Updownarrow$$
$$det(f - \lambda id) = 0$$

Exemple 1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'endomorphisme qui dans la base canonique est représenté par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Alors $det(f - \lambda id) = det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6.$

Les valeurs propres de f sont 2 et 3.

Exemple 1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'endomorphisme qui dans la base canonique est représenté par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Alors $det(f - \lambda id) = det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6.$
Les valeurs propres de f sont 2 et 3.
Les coordonées des vecteurs de l'espace propre E_2 sont les solutions du système linéaire

$$\begin{pmatrix} 1-2 & 2 & ,0 \\ -1 & 4-2 & ,0 \end{pmatrix}.$$

Donc $E_2 = Vect((2,1))$.

Exemple 2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'endomorphisme qui dans la base canonique est représenté par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $det(f - \lambda id) = det \begin{pmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ -1 & 0 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1.$

f n'a pas de valeurs propres réelles.

Définition

Polynôme caractéristique d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On appelle polynôme caractéristique P_A de A le polynôme de $K[x]$ défini par $P_A(x) = det(A - xI_n)$.

Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle polynôme caractéristique P_f de f le polynôme de $K[x]$ défini par $P_f(x) = det(f - xId)$.

Condition suffisante

Théorème

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ des valeurs propres deux à deux distinctes de l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ avec vecteurs propres correspondants $v_1, \ldots, v_r$. Alors $v_1, \ldots, v_r$ sont linéairement indépendants.

Corollaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et E de dimension n sur K. Si le polynôme caractéristique P_f a n valeurs propres distinctes dans K, alors f est diagonalisable sur K.

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'endomorphisme qui dans la base canonique est représenté par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Comme f a deux valeurs propres distincts, 2 et 3, l'endomorphisme est diagonalisable.

Définitions

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit $\lambda \in K$ une valeur propre de f.

Multiplicité algébrique

On appelle la multiplicité algébrique de λ la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique P_f de f.

Multiplicité géométrique

On appelle la multiplicité géométrique de λ la dimension de l'espace propre E_λ associé à λ.

Définitions

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit $\lambda \in K$ une valeur propre de f.

Multiplicité algébrique

On appelle la multiplicité algébrique de λ la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique P_f de f.

Multiplicité géométrique

On appelle la multiplicité géométrique de λ la dimension de l'espace propre E_λ associé à λ.

Proposition

Soit λ une valeur propre d'un endomorphisme f, alors la multiplicité géométrique de λ est inférieure ou égale à la multiplicité algébrique de λ.

Critère

Théorème

Sont équivalents :

1. f est diagonalisable sur K ;
2. P_f est scindé sur K, ce qui veut dire que $P_f(X)$ s'écrit :

$$P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \ldots (X - \lambda_p)^{\alpha_p},$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in K$ et $n = \alpha_1 + \ldots + \alpha_p$,
et pour toute racine λ_i de P_f on a que la multiplicité algébrique et la multiplicité géométrique de λ_i coïncident.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$P_A(x) = -(x-1)(x+2)^2.$$

La multiplicité algébrique de la valeur propre 1 est 1.
La multiplicité algébrique de la valeur propre -2 est 2.

Calcul des multiplicités géométriques

$$\begin{aligned} dim(E_\lambda) &= dim(Ker(f - \lambda Id_E)) \\ &= dim(E) - dim(Im(f - \lambda Id_E)) \\ &= dim(E) - rang(f - \lambda Id_E). \end{aligned}$$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$P_A(x) = -(x-1)(x+2)^2.$$

A est diagonalisable si et seulement si

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$P_A(x) = -(x-1)(x+2)^2.$$

A est diagonalisable si et seulement si $dim(E_{-2}) = 2$.
On a

$$dim(E_{-2}) = dim(E) - rang(f + 2Id_E) =$$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$P_A(x) = -(x-1)(x+2)^2.$$

A est diagonalisable si et seulement si $dim(E_{-2}) = 2$.
On a

$$dim(E_{-2}) = dim(E) - rang(f + 2Id_E) = 3 - rang(f + 2Id_E),$$

où

$$rang(f + 2Id_E) =$$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$P_A(x) = -(x-1)(x+2)^2.$$

A est diagonalisable si et seulement si $dim(E_{-2}) = 2$.
On a

$$dim(E_{-2}) = dim(E) - rang(f + 2Id_E) = 3 - rang(f + 2Id_E),$$

où

$$rang(f + 2Id_E) = rang \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$P_A(x) = -(x-1)(x+2)^2.$$

A est diagonalisable si et seulement si $dim(E_{-2}) = 2$.
On a

$$dim(E_{-2}) = dim(E) - rang(f + 2Id_E) = 3 - rang(f + 2Id_E),$$

où

$$rang(f + 2Id_E) = rang \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi on trouve :

$$dim(E_{-2}) = 2 \text{ et } A \text{ est diagonalisable !}$$

Test

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ une matrice diagonalisable.
Quels énoncés sont vrais ?

1. $\forall P \in \mathcal{M}_n(K)$ on a $P^{-1}AP$ est diagonale ;
2. $\forall P \in GL_n(K)$ on a $P^{-1}AP$ est diagonale ;
3. $\exists P \in \mathcal{M}_n(K)$ tel que $P^{-1}AP$ est diagonale;
4. $\exists P \in GL_n(K)$ tel que $P^{-1}AP$ est diagonale.

Test

Soient $f \in \mathcal{L}_K(E)$ et $\mathcal{E}$ une base de E telles que

$$\mathcal{M}(f,\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A.$$

Quels énoncés sont vrais ?

1. Il existe une base de vecteurs propres de f dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$;
2. Il existe une unique base de vecteurs propres de f dans laquelle la matrice de f est égale à A ;
3. Il existe une base de vecteurs propres de f dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Test

Soit f une symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^3$ par rapport à un plan vectoriel.
Quels énoncés sont vrais ?

1. Les valeurs propres de f dépendent du plan choisi ;
2. Les valeurs propres de f sont 1 et -1 ;
3. $\exists P \in GL_n(K)$ tel que $P^{-1}AP$ est diagonale;
4. f n'est pas diagonalisable.

Test

Soit $f \in \mathcal{L}_K(E)$ un endomorphisme et soit $dim_K(E) = n \geq 1$.
Quels énoncés sont vrais ?

1. 0 est un vecteur propre de f ;
2. Si $K = \mathbb{R}$, alors f a au moins un vecteur propre ;
3. Si $K = \mathbb{R}$, alors f a une infinité de vecteurs propres ;
4. Si $K = \mathbb{C}$, alors f a au moins un vecteur propre ;
5. Si $K = \mathbb{C}$, alors f a une infinité de vecteurs propres.

Test

Soit $f \in \mathcal{L}_K(E)$ un endomorphisme et soit $dim_K(E) = n \geq 1$.
Quels énoncés sont vrais ?

1. f a exactement n valeurs propres distincts ;
2. f a au plus n valeurs propres distincts ;
3. f a au moins n valeurs propres distincts.

Test

Soit $f \in \mathcal{L}_K(E)$ un endomorphisme et soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ la matrice de f dans une base $\mathcal{E}$ de E.
Quels énoncés sont vrais ?

1. Il existe un vecteur v de E tel que $f(v) = 5v$;
2. Il existe un vecteur v de E tel que $f(v) = -5v$;
3. Il existe un vecteur $v \neq 0$ de E tel que $f(v) = 0$.

Calcul de la puissance d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ une matrice diagonalisable. Soient D une matrice diagonale et P une matrice inversible telle que :

$$D = P^{-1}AP.$$

Donc :

$$A^k = (PDP^{-1})(PDP^{-1})\dots(PDP^{-1})$$

Calcul de la puissance d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ une matrice diagonalisable. Soient D une matrice diagonale et P une matrice inversible telle que :

$$D = P^{-1}AP.$$

Donc :

$$A^k = (PDP^{-1})(PDP^{-1})\dots(PDP^{-1}) = PD^kP^{-1}.$$

Si $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$, alors $D^k =$

Calcul de la puissance d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ une matrice diagonalisable. Soient D une matrice diagonale et P une matrice inversible telle que :

$$D = P^{-1}AP.$$

Donc :

$$A^k = (PDP^{-1})(PDP^{-1})\dots(PDP^{-1}) = PD^kP^{-1}.$$

$$\text{Si } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ alors } D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

Exemple : modèle de population

x_k = taille de la population X après k ans ;
y_k = taille de la population Y après k ans.

Les populations évoluent selon les équations :

$$\begin{cases} x_k &= 6y_{k-1} \\ y_k &= 1/4x_{k-1} + 1/2y_{k-1} \end{cases} \quad \text{et telles que } x_0 = 2, y_0 = 1.$$

On pose $V_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$. Alors

$$V_{k+1} = AV_k, \qquad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

On obtient :

$$V_k =$$

Exemple : modèle de population

x_k = taille de la population X après k ans ;
y_k = taille de la population Y après k ans.

Les populations évoluent selon les équations :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x_k & = & 6y_{k-1} \\ y_k & = & 1/4x_{k-1} + 1/2y_{k-1} \end{array} \right. \quad \text{et telles que } x_0 = 2, y_0 = 1.$$

On pose $V_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$. Alors

$$V_{k+1} = AV_k, \qquad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

On obtient :

$$V_k = {\color{red}A^k} V_0.$$

Exemple simple

On considère l'éqation différentielle :

$$y' = ay,$$

avec $y = f(x)$ une fonction d'une variable réelle x et a une constante.
Solution :

$$y = ce^{ax}, \text{ avec } c \text{ une constante.}$$

But : résoudre

$$\begin{cases} y_1' &= & y_1 + y_2 \\ y_2' &= & 4y_1 - 2y_2 \end{cases}$$

et telles que $y_1(0) = 1, y_2(0) = 6$.

Exemple

$$\begin{cases} y_1' &= y_1 + y_2 \\ y_2' &= 4y_1 - 2y_2 \end{cases}$$

Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Alors $Y' = AY$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

On a $A = PDP^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Avec $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = PU$, on obtient

$$Y' = AY \rightsquigarrow PU' = APU \rightsquigarrow U' = DU : \begin{cases} u_1' &= 2u_1 \\ u_2' &= -3u_2 \end{cases}.$$