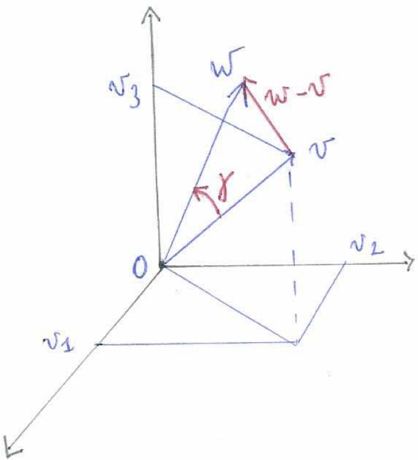
Amphi 3 - partie 2 : Espaces Euclidiens I
Fondements Mathématiques 3

Ann Lemahieu

September 29, 2019

Géométrie en $\mathbb{R}^3$

Soient $v(v_1, v_2, v_3)$ et $w(w_1, w_2, w_3)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.



Géométrie en $\mathbb{R}^3$

Longueur d'un vecteur en $\mathbb{R}^3$

Par le théorème de Pythagore on trouve que la longueur du vecteur v est :

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

Distance entre deux points dans $\mathbb{R}^3$

La distance entre v et w est la longueur du vecteur $w - v$ et est donc

$$d(v, w) = \|w - v\| = \sqrt{(w_1 - v_1)^2 + (w_2 - v_2)^2 + (w_3 - v_3)^2}.$$

Géométrie en $\mathbb{R}^3$

Dans le triangle *ovw* on a par la loi des cosinus :

$$\|w - v\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\,\|v\|\,\|w\|\,cos(\gamma), \qquad \text{d'où}$$

$$\begin{aligned} cos(\gamma) &= \frac{\|v\|^2 + \|w\|^2 - \|w - v\|^2}{2\,\|v\|\,\|w\|} \\ &= \frac{v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3}{\|v\|\,\|w\|}. \end{aligned}$$

Produit scalaire canonique en $\mathbb{R}^n$

Définition

Le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ est l'application

$$\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : (v, w) \longmapsto v \cdot w =< v, w >,$$

telle que pour $v = (v_1, \ldots, v_n)$ et $w = (w_1, \ldots, w_n)$ dans $\mathbb{R}^n$:

$$v \cdot w = v_1 w_1 + \ldots + v_n w_n.$$

Autrement dit en $\mathbb{R}^3$:

$$cos(\gamma) = \frac{v \cdot w}{\|v\| \, \|w\|}.$$

Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$

Propriétés

Le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ est symétrique, défini positif et bilinéaire :

1. symétrique : $\forall v, w \in R^n : v \cdot w = w \cdot v.$
2. défini positif : $\forall v \in \mathbb{R}^n : v \cdot v \geq 0$ (positif)
   $v \cdot v = 0 \Leftrightarrow v = 0$ (défini).
3. bilinéaire : $\forall x, v, w \in \mathbb{R}^n, \forall a, b \in \mathbb{R}$:

$$x \cdot (av + bw) = a(x \cdot v) + b(x \cdot w),$$

$$(av + bw) \cdot x = a(v \cdot x) + b(w \cdot x).$$

Espaces Euclidiens

Définition

Un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire est dit espace Euclidien.

Exemple : Sur $\mathbb{R}[x]$ on définit : $P \cdot Q := \int_0^1 P(x)Q(x)dx$.

Géométrie en $\mathbb{R}^n$

Norme d'un vecteur en $\mathbb{R}^n$

La norme d'un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ est

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}.$$

Distance entre deux points en $\mathbb{R}^n$

La distance (Euclidienne) entre les points $v, w \in \mathbb{R}^n$ est

$$d(w, v) = \|w - v\|.$$

Géométrie en $\mathbb{R}^n$

Rappel : Soit γ l'angle entre deux vecteurs v et w de $\mathbb{R}^3$, alors

$$cos(\gamma) = \frac{v \cdot w}{\|v\| \, \|w\|}.$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^n : |v \cdot w| \leq \|v\| \, \|w\| \, .$$

D'où :

$$-1 \leq \frac{v \cdot w}{\|v\| \, \|w\|} \leq 1.$$

Définition

L'angle γ $(0 \leq \gamma \leq \pi)$ entre deux vecteurs v et w dans $\mathbb{R}^n$ est tel que

$$cos(\gamma) = \frac{v \cdot w}{\|v\| \, \|w\|}.$$

Vecteurs orthogonaux

Définition

Deux vecteurs $v, w \in \mathbb{R}^n$ sont orthogonaux si l'angle entre les deux est $\pi/2$ ou donc si $v \cdot w = 0$.

Notation : $v \perp w$.

Théorème

Une famille de vecteurs orthogonaux dans $\mathbb{R}^n$, chacun distinct du vecteur 0, est linéairement indépendante.

Corollaire

Une famille de n vecteurs orthogonaux dans $\mathbb{R}^n$, chacun distinct du vecteur 0, est une base de $\mathbb{R}^n$.

Bases orthogonaux/bases orthonormaux

Définition

Une base de $\mathbb{R}^n$ qui est formée de vecteurs qui sont deux à deux orthogonaux, est appelée une base orthogonale.

Définition

Une base de $\mathbb{R}^n$ qui est formée de vecteurs de norme 1 qui sont deux à deux orthogonaux, est appelée une base orthonormée.