Amphi 4 : Espaces Euclidiens II
Fondements Mathématiques 3

Ann Lemahieu

September 30, 2019

Produit scalaire canonique en $\mathbb{R}^n$

Définition

Le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ est l'application

$$\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : (v, w) \longmapsto v \cdot w =< v, w >,$$

telle que pour $v = (v_1, \ldots, v_n)$ et $w = (w_1, \ldots, w_n)$ dans $\mathbb{R}^n$:

$$v \cdot w = v_1 w_1 + \ldots + v_n w_n.$$

Autrement dit en $\mathbb{R}^3$:

$$cos(\gamma) = \frac{v \cdot w}{\|v\| \, \|w\|},$$

où γ est l'angle entre les vecteurs v et w.

Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$

Propriétés

Le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ est symétrique, défini positif et bilinéaire :

1. symétrique : $\forall v, w \in R^n : v \cdot w = w \cdot v$.
2. défini positif : $\forall v \in \mathbb{R}^n : v \cdot v \geq 0$ (positif)
   $v \cdot v = 0 \Leftrightarrow v = 0$ (défini).
3. bilinéaire : $\forall x, v, w \in \mathbb{R}^n, \forall a, b \in \mathbb{R}$:

$$x \cdot (av + bw) = a(x \cdot v) + b(x \cdot w),$$

$$(av + bw) \cdot x = a(v \cdot x) + b(w \cdot x).$$

Géométrie en $\mathbb{R}^n$

Norme d'un vecteur en $\mathbb{R}^n$

La norme d'un vecteur $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ est

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}.$$

Identité de polarisation

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^n : v \cdot w = \frac{1}{2}\left(\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2\right).$$

Vecteurs orthogonaux

Définition

L'angle γ $(0 \leq \gamma \leq \pi)$ entre deux vecteurs v et w dans $\mathbb{R}^n$ est tel que :

$$cos(\gamma) = \frac{v \cdot w}{\|v\| \, \|w\|}.$$

Définition

Deux vecteurs $v, w \in \mathbb{R}^n$ sont orthogonaux si l'angle entre les deux est $\pi/2$ ou donc si $v \cdot w = 0$.

Notation : $v \perp w$.

Théorème

Une famille de vecteurs orthogonaux dans $\mathbb{R}^n$, chacun distinct du vecteur 0, est linéairement indépendante.

Bases orthogonaux/bases orthonormaux

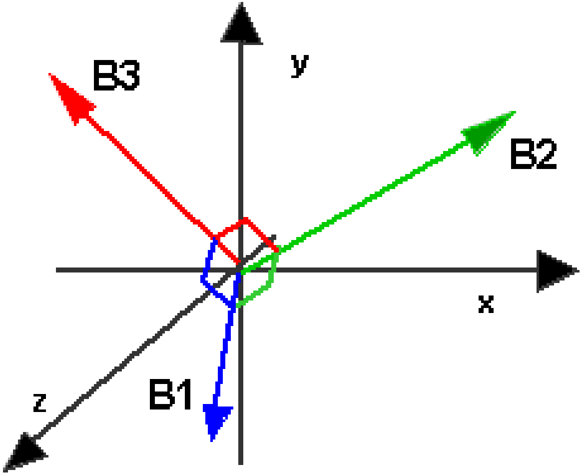
Définition

Une base de $\mathbb{R}^n$ qui est formée de vecteurs qui sont deux à deux orthogonaux, est appelée une base orthogonale.

Définition

Une base de $\mathbb{R}^n$ qui est formée de vecteurs de norme 1 (vecteurs unitaires) qui sont deux à deux orthogonaux, est appelée une base orthonormée.

Bases orthogonaux/bases orthonormaux



Orthogonal à un ensemble

Définition

Soit S un sous-ensemble quelconque de $\mathbb{R}^n$. On appelle l'orthogonal de S dans $\mathbb{R}^n$ l'ensemble

$$S^\perp := \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \cdot w = 0, \forall w \in S\}.$$

Lemme

$S^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Orthogonal à un ensemble

Définition

Soit S un sous-ensemble quelconque de $\mathbb{R}^n$. On appelle l'orthogonal de S dans $\mathbb{R}^n$ l'ensemble

$$S^\perp := \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \cdot w = 0, \forall w \in S\}.$$

Lemme

$S^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exemples : $\{0\}^\perp =$

Orthogonal à un ensemble

Définition

Soit S un sous-ensemble quelconque de $\mathbb{R}^n$. On appelle l'orthogonal de S dans $\mathbb{R}^n$ l'ensemble

$$S^\perp := \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \cdot w = 0, \forall w \in S\}.$$

Lemme

$S^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exemples : $\{0\}^\perp = \mathbb{R}^n$ et $(\mathbb{R}^n)^\perp =$

Orthogonal à un ensemble

Définition

Soit S un sous-ensemble quelconque de $\mathbb{R}^n$. On appelle l'orthogonal de S dans $\mathbb{R}^n$ l'ensemble

$$S^\perp := \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \cdot w = 0, \forall w \in S\}.$$

Lemme

$S^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exemples : $\{0\}^\perp = \mathbb{R}^n$ et $(\mathbb{R}^n)^\perp = \{0\}$.

Test

Quels ensembles sont des bases orthogonales de $\mathbb{R}^3$?
Lesquels sont des bases orthonormées de $\mathbb{R}^3$?

1. $((1,0,0),(0,0,1))$;

Test

Quels ensembles sont des bases orthogonales de $\mathbb{R}^3$?
Lesquels sont des bases orthonormées de $\mathbb{R}^3$?

1. $((1,0,0),(0,0,1))$;
2. $((1,0,0),(0,2,0),(0,0,1))$;

Test

Quels ensembles sont des bases orthogonales de $\mathbb{R}^3$?
Lesquels sont des bases orthonormées de $\mathbb{R}^3$?

1. $((1,0,0),(0,0,1))$;
2. $((1,0,0),(0,2,0),(0,0,1))$;
3. $((2,0,0),(0,2,0),(0,0,2))$;

Test

Quels ensembles sont des bases orthogonales de $\mathbb{R}^3$?
Lesquels sont des bases orthonormées de $\mathbb{R}^3$?

1. $((1,0,0),(0,0,1))$;
2. $((1,0,0),(0,2,0),(0,0,1))$;
3. $((2,0,0),(0,2,0),(0,0,2))$;
4. $((1,1,0),(-1,1,0),(0,0,1))$;

Test

Quels ensembles sont des bases orthogonales de $\mathbb{R}^3$?
Lesquels sont des bases orthonormées de $\mathbb{R}^3$?

1. $((1,0,0),(0,0,1))$;
2. $((1,0,0),(0,2,0),(0,0,1))$;
3. $((2,0,0),(0,2,0),(0,0,2))$;
4. $((1,1,0),(-1,1,0),(0,0,1))$;
5. $\left((\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0),(\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}),(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})\right)$.

Intérêt des bases orthonormées

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, alors

$$e_i \cdot e_j = \delta_{i,j} \qquad \text{(symbole de Kronecker).}$$

Pour $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ et $w = \sum_{j=1}^n w_j e_j$, on trouve :

$$v \cdot w = v_1 w_1 + \ldots v_n w_n.$$

Attention : les $(v_1, \ldots, v_n)$ et $(w_1, \ldots, w_n)$ sont les coordonnées dans une base orthonormée quelconque !

Intérêt des bases orthonormées

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$.
Soit $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i \in \mathbb{R}^n$, alors

$$v_i = \frac{v \cdot e_i}{\|e_i\|^2}.$$

Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, alors

$$v_i = v \cdot e_i.$$

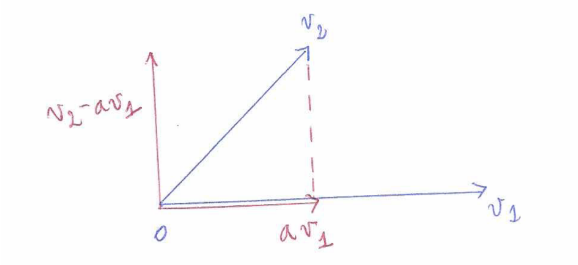
Procédé de Gram-Schmidt

But : transformer une base quelconque d'un sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^n$ en une base orthonormée de E.

Procédé de Gram-Schmidt

But : transformer une base quelconque d'un sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^n$ en une base orthonormée de E.

Cas de deux vecteurs :



Soit a t. q. $v_1 \perp v_2 - av_1$ ou $0 = (v_2 - av_1) \cdot v_1 \rightsquigarrow a = \frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\|^2}$. Alors

$$v_2' := v_2 - \frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\|^2} v_1 \perp v_1 \qquad \text{et} \qquad Vect(v_1, v_2) = Vect(v_1, v_2').$$

Procédé de Gram-Schmidt

Théorème (Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt)

Si $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base de E, alors $(v'_1, \ldots, v'_n)$ avec

$$\begin{aligned}
v'_1 &= v_1 \\
v'_2 &= v_2 - \frac{v'_1 \cdot v_2}{\|v'_1\|^2} v'_1 \\
v'_3 &= v_3 - \frac{v'_1 \cdot v_3}{\|v'_1\|^2} v'_1 - \frac{v'_2 \cdot v_3}{\|v'_2\|^2} v'_2 \\
&\vdots \\
v'_n &= v_n - \frac{v'_1 \cdot v_n}{\|v'_1\|^2} v'_1 - \frac{v'_2 \cdot v_n}{\|v'_2\|^2} v'_2 - \ldots - \frac{v'_{n-1} \cdot v_n}{\|v'_{n-1}\|^2} v'_{n-1}
\end{aligned}$$

est une base orthogonale de E.

Procédé de Gram-Schmidt

Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthogonale de E, alors

$$\left(\frac{e_1}{\|e_1\|}, \ldots, \frac{e_n}{\|e_n\|}\right)$$

est une base orthonormée de E.

Exemple : Gram-Schmidt

On applique le procédé de Gram-Schmidt sur la base

$$v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (1, 0, 1).$$

Exemple : Gram-Schmidt

On applique le procédé de Gram-Schmidt sur la base

$$v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (1, 0, 1).$$

Rappel : $v_2' = v_2 - \frac{v_1' \cdot v_2}{\left\| v_1' \right\|^2} v_1'$.

Exemple : Gram-Schmidt

On applique le procédé de Gram-Schmidt sur la base

$$v_1 = (1,1,0), v_2 = (0,1,1), v_3 = (1,0,1).$$

Rappel : $v_2' = v_2 - \frac{v_1' \cdot v_2}{\|v_1'\|^2} v_1'$. Comme $\|v_1\|^2 =$

Exemple : Gram-Schmidt

On applique le procédé de Gram-Schmidt sur la base

$$v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (1, 0, 1).$$

Rappel : $v_2' = v_2 - \frac{v_1' \cdot v_2}{\|v_1'\|^2} v_1'$. Comme $\|v_1\|^2 = 2$ et $v_1 \cdot v_2 =$

Exemple : Gram-Schmidt

On applique le procédé de Gram-Schmidt sur la base

$$v_1 = (1,1,0), v_2 = (0,1,1), v_3 = (1,0,1).$$

Rappel : $v_2' = v_2 - \frac{v_1' \cdot v_2}{\|v_1'\|^2} v_1'$. Comme $\|v_1\|^2 = 2$ et $v_1 \cdot v_2 = 1$, on a

$$v_2' = v_2 - \frac{v_1}{2} = (0,1,1) - \frac{(1,1,0)}{2} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1).$$

Exemple : Gram-Schmidt

On applique le procédé de Gram-Schmidt sur la base

$$v_1 = (1,1,0), v_2 = (0,1,1), v_3 = (1,0,1).$$

Rappel : $v_2' = v_2 - \frac{v_1' \cdot v_2}{\|v_1'\|^2} v_1'$. Comme $\|v_1\|^2 = 2$ et $v_1 \cdot v_2 = 1$, on a

$$v_2' = v_2 - \frac{v_1}{2} = (0,1,1) - \frac{(1,1,0)}{2} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1).$$

Rappel : $v_3' = v_3 - \frac{v_1' \cdot v_3}{\|v_1'\|^2} v_1' - \frac{v_2' \cdot v_3}{\|v_2'\|^2} v_2'$.

Exemple : Gram-Schmidt

On applique le procédé de Gram-Schmidt sur la base

$$v_1 = (1,1,0), v_2 = (0,1,1), v_3 = (1,0,1).$$

Rappel : $v_2' = v_2 - \frac{v_1' \cdot v_2}{\|v_1'\|^2} v_1'$. Comme $\|v_1\|^2 = 2$ et $v_1 \cdot v_2 = 1$, on a

$$v_2' = v_2 - \frac{v_1}{2} = (0,1,1) - \frac{(1,1,0)}{2} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1).$$

Rappel : $v_3' = v_3 - \frac{v_1' \cdot v_3}{\|v_1'\|^2} v_1' - \frac{v_2' \cdot v_3}{\|v_2'\|^2} v_2'$. Comme $\|v_2'\|^2 =$

Exemple : Gram-Schmidt

On applique le procédé de Gram-Schmidt sur la base

$$v_1 = (1,1,0), v_2 = (0,1,1), v_3 = (1,0,1).$$

Rappel : $v_2' = v_2 - \frac{v_1' \cdot v_2}{\|v_1'\|^2} v_1'$. Comme $\|v_1\|^2 = 2$ et $v_1 \cdot v_2 = 1$, on a

$$v_2' = v_2 - \frac{v_1}{2} = (0,1,1) - \frac{(1,1,0)}{2} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1).$$

Rappel : $v_3' = v_3 - \frac{v_1' \cdot v_3}{\|v_1'\|^2} v_1' - \frac{v_2' \cdot v_3}{\|v_2'\|^2} v_2'$. Comme $\|v_2'\|^2 = 3/2$ et $v_1 \cdot v_3 =$

Exemple : Gram-Schmidt

On applique le procédé de Gram-Schmidt sur la base

$$v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (1, 0, 1).$$

Rappel : $v_2' = v_2 - \frac{v_1' \cdot v_2}{\|v_1'\|^2} v_1'$. Comme $\|v_1\|^2 = 2$ et $v_1 \cdot v_2 = 1$, on a

$$v_2' = v_2 - \frac{v_1}{2} = (0, 1, 1) - \frac{(1, 1, 0)}{2} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1).$$

Rappel : $v_3' = v_3 - \frac{v_1' \cdot v_3}{\|v_1'\|^2} v_1' - \frac{v_2' \cdot v_3}{\|v_2'\|^2} v_2'$. Comme $\|v_2'\|^2 = 3/2$ et $v_1 \cdot v_3 = 1$ et $v_2' \cdot v_3 =$

Exemple : Gram-Schmidt

On applique le procédé de Gram-Schmidt sur la base

$$v_1 = (1,1,0), v_2 = (0,1,1), v_3 = (1,0,1).$$

Rappel : $v_2' = v_2 - \frac{v_1' \cdot v_2}{\|v_1'\|^2} v_1'$. Comme $\|v_1\|^2 = 2$ et $v_1 \cdot v_2 = 1$, on a

$$v_2' = v_2 - \frac{v_1}{2} = (0,1,1) - \frac{(1,1,0)}{2} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1).$$

Rappel : $v_3' = v_3 - \frac{v_1' \cdot v_3}{\|v_1'\|^2} v_1' - \frac{v_2' \cdot v_3}{\|v_2'\|^2} v_2'$. Comme $\|v_2'\|^2 = 3/2$ et $v_1 \cdot v_3 = 1$ et $v_2' \cdot v_3 = 1/2$, on a

$$v_3' = v_3 - \frac{v_1}{2} - \frac{v_2'}{3} = (1,0,1) - \frac{(1,1,0)}{2} - \frac{(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 1)}{3} = (\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{2}{3}).$$

Exemple : Gram-Schmidt

On a obtenu :

$$v_1 = (1, 1, 0), v_2' = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1), v_3' = (\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{2}{3})$$

est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

Exemple : Gram-Schmidt

On a obtenu :

$$v_1 = (1, 1, 0), v_2' = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1), v_3' = (\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{2}{3})$$

est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$. On a

$$\|v_1\| = \sqrt{2}, \quad \|v_2'\| = \sqrt{3/2}, \quad \|v_3'\| = 2/\sqrt{3},$$

et donc

$$v_1'' = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), v_2'' = (\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}), v_3'' = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$$

est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$P_A(x) = -(x-1)(x+2)^2.$$

$$E_{-2} = Vect((-1,1,0),(-1,0,1)) \text{ et } E_1 = Vect(1,1,1).$$

On observe que $E_{-2} \perp E_1$.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$P_A(x) = -(x-1)(x+2)^2.$$

$$E_{-2} = Vect((-1,1,0),(-1,0,1)) \text{ et } E_1 = Vect(1,1,1).$$

On observe que $E_{-2} \perp E_1$.

On applique l'algorithme de Gram-Schmidt sur E_{-2} :

Rappel : $v_2' = v_2 - \frac{v_1' \cdot v_2}{\|v_1'\|^2} v_1'$.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$P_A(x) = -(x-1)(x+2)^2.$$

$$E_{-2} = Vect((-1,1,0),(-1,0,1)) \text{ et } E_1 = Vect(1,1,1).$$

On observe que $E_{-2} \perp E_1$.
On applique l'algorithme de Gram-Schmidt sur E_{-2} :
Rappel : $v_2' = v_2 - \frac{v_1' \cdot v_2}{\left\|v_1'\right\|^2} v_1'$.
On trouve : $v_2' = (-1,0,1) - 1/2(-1,1,0) = (-1/2,-1/2,1)$.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$P_A(x) = -(x-1)(x+2)^2.$$

$$E_{-2} = Vect((-1,1,0),(-1,0,1)) \text{ et } E_1 = Vect(1,1,1).$$

On observe que $E_{-2} \perp E_1$.
On applique l'algorithme de Gram-Schmidt sur E_{-2} :
Rappel : $v_2' = v_2 - \frac{v_1' \cdot v_2}{\|v_1'\|^2} v_1'$.
On trouve : $v_2' = (-1,0,1) - 1/2(-1,1,0) = (-1/2,-1/2,1)$.
Comme $\|v_1'\| = \sqrt{2}$, $\|v_2'\| = \sqrt{3/2}$ et $\|(1,1,1)\| = \sqrt{3}$, on obtient une base orthonormée de vecteurs propres :

$$((\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}), (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})).$$

Exemple : suite

Observation : Soit P la matrice de passage :

$$P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & \sqrt{3}/3 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & \sqrt{3}/3 \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} & \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}.$$

Alors

$${}^tPP = I_n.$$

Coïncidence ?

Matrices orthogonales

Définition

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si ${}^tAA = I_n$.

Exemple :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

est une matrice orthogonale, car

$$\frac{1}{3}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrices orthogonales

Propriété

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale, alors $det(A) = \pm 1$.

Matrices orthogonales

Propriété

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale, alors $det(A) = \pm 1$.

Et la réciproque ?

Matrices orthogonales

Propriété

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale, alors $det(A) = \pm 1$.

Et la réciproque ?

Exemple : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Matrices orthogonales

Propriété

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale, alors $det(A) = \pm 1$.

Et la réciproque ?
Exemple : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Alors $det(A) =$

Matrices orthogonales

Propriété

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale, alors $det(A) = \pm 1$.

Et la réciproque ?
Exemple : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Alors $det(A) = 1$ et

$$^tAA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

Matrices orthogonales

Propriété

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale, alors $det(A) = \pm 1$.

Et la réciproque ?

Exemple : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Alors $det(A) = 1$ et

$$^{t}AA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Matrices orthogonales

Propriété

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale, alors $det(A) = \pm 1$.

Et la réciproque ?

Conclusion : La réciproque, i.e. si $det(A) = \pm 1$, alors A est une matrice orthogonale, est

Matrices orthogonales

Propriété

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale, alors $det(A) = \pm 1$.

Et la réciproque ?

Conclusion : La réciproque, i.e. si $det(A) = \pm 1$, alors A est une matrice orthogonale, est

FAUX !!

Matrices orthogonales

Théorème

Sont équivalents :

1. A est une matrice orthogonale
2. Les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$
3. Les lignes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$

Matrices orthogonales

Corollaire

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et si les sous-espaces propres sont 2 à 2 orthogonaux, alors il existe une matrice orthogonale $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. A est diagonalisable car $mult_{alg}(1) = mult_{geom}(1)$ et $mult_{alg}(-2) = mult_{geom}(-2)$.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. A est diagonalisable car $mult_{alg}(1) = mult_{geom}(1)$ et $mult_{alg}(-2) = mult_{geom}(-2)$.
2. $((-1,1,0),(-1,0,1))$ est une base de E_{-2} et $(1,1,1)$ est une base de E_1. Ici $E_{-2} \perp E_1$.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. A est diagonalisable car $mult_{alg}(1) = mult_{geom}(1)$ et $mult_{alg}(-2) = mult_{geom}(-2)$.
2. $((-1,1,0),(-1,0,1))$ est une base de E_{-2} et $(1,1,1)$ est une base de E_1. Ici $E_{-2} \perp E_1$.
3. Le procédé de Gram-Schmidt donne une base orthonormée de E_{-2} et de E_1 :

$$\left((\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}) \right), \qquad \left((\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}) \right)$$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Soit P la matrice

$$\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & \sqrt{3}/3 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & \sqrt{3}/3 \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} & \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}.$$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Soit P la matrice
$$\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & \sqrt{3}/3 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & \sqrt{3}/3 \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} & \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}.$$

5. P est orthogonale et $P^{-1}AP$ est la matrice diagonale
$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrices orthogonales

Théorème

Sont équivalents :

1. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale
2. $\forall v \in \mathbb{R}^n : \|v\| = \|Av\|$
3. $\forall v, w \in \mathbb{R}^n : (Av) \cdot (Aw) = v \cdot w$.

Matrices orthogonales

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale. Alors $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$, l'angle entre les vecteurs v et w est le même que l'angle entre les vecteurs Av et Aw.

Test

Vrai ou faux ?

1. La matrice A est orthogonale ssi $det(A) = \pm 1$.

Test

Vrai ou faux ?

1. La matrice A est orthogonale ssi $det(A) = \pm 1$.
2. Toute matrice orthogonale est inversible.

Test

Vrai ou faux ?

1. La matrice A est orthogonale ssi $det(A) = \pm 1$.
2. Toute matrice orthogonale est inversible.
3. Soit A une matrice orthogonale. Alors $A^{-1} = {}^tA$.

Test

Vrai ou faux ?

1. La matrice A est orthogonale ssi $det(A) = \pm 1$.
2. Toute matrice orthogonale est inversible.
3. Soit A une matrice orthogonale. Alors $A^{-1} = {}^tA$.
4. Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(u_1, \ldots, u_n)$ des bases orthonormées de $\mathbb{R}^n$, alors il existe une application linéaire f telle que $(u_1, \ldots, u_n) = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$.

Test

Vrai ou faux ?

1. La matrice A est orthogonale ssi $det(A) = \pm 1$.
2. Toute matrice orthogonale est inversible.
3. Soit A une matrice orthogonale. Alors $A^{-1} = {}^tA$.
4. Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(u_1, \ldots, u_n)$ des bases orthonormées de $\mathbb{R}^n$, alors il existe une application linéaire f telle que $(u_1, \ldots, u_n) = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$.
5. Si A est une matrice orthogonale, alors A^{-1} est une matrice orthogonale.

Notation

$O(n, \mathbb{R})$ est le groupe des matrices orthogonales dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$SO(n, \mathbb{R})$ est le groupe des matrices orthogonales de déterminant 1 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Exemples / contre-exemples en $\mathbb{R}^2$

Quelles matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont des matrices orthogonales ?

Exemples / contre-exemples en $\mathbb{R}^2$

Quelles matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont des matrices orthogonales ?

1. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$?

Exemples / contre-exemples en $\mathbb{R}^2$

Quelles matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont des matrices orthogonales ?

1. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$? homothétie de rapport 2

Exemples / contre-exemples en $\mathbb{R}^2$

Quelles matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont des matrices orthogonales ?

1. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$? homothétie de rapport 2
2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$?

Exemples / contre-exemples en $\mathbb{R}^2$

Quelles matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont des matrices orthogonales ?

1. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$? homothétie de rapport 2
2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$? symétrie par rapport à une droite

Exemples / contre-exemples en $\mathbb{R}^2$

Quelles matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont des matrices orthogonales ?

1. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$? homothétie de rapport 2
2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$? symétrie par rapport à une droite
3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$?

Exemples / contre-exemples en $\mathbb{R}^2$

Quelles matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont des matrices orthogonales ?

1. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$? homothétie de rapport 2
2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$? symétrie par rapport à une droite
3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$? rotation

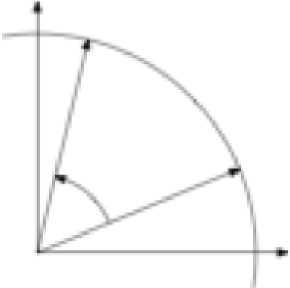
Etude de $O(2, \mathbb{R})$

Théorème

Si $A \in SO(2, \mathbb{R})$, alors il existe un angle θ tel que

$$A = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

A représente la rotation d'angle θ de centre 0.



Etude de $O(2, \mathbb{R})$

Théorème

Si $A \in O(2,\mathbb{R}) \setminus SO(2,\mathbb{R})$, alors il existe un angle θ tel que

$$A = \begin{pmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) \\ sin(\theta) & -cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

A représente la symétrie orthogonale d'angle $\theta/2$ par rapport à la droite.