Amphi 5 : Diagonalisation des matrices symétriques réelles
Fondements Mathématiques 3

Ann Lemahieu

October 7, 2019

Fil rouge

Soit E un espace vectoriel sur un corps K de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Donné un endomorphisme $f : E \longrightarrow E$.

Est-ce qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{M}(f, \mathcal{B})$ soit une matrice diagonale ?

Fil rouge

Soit E un espace vectoriel sur un corps K de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Donné un endomorphisme $f : E \longrightarrow E$.

Est-ce qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{M}(f, \mathcal{B})$ soit une matrice diagonale ?

En termes matricielles :

Donnée une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$.

Est-ce qu'il existe une matrice $P \in GL_n(K)$ telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale ?

Quelques réponses

◇ f est diagonalisable si et seulement si E a une base de vecteurs propres de f.

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ une base de E. Alors

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

si et seulement si

$$f(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots, f(v_n) = \lambda_n v_n.$$

Quelques réponses

◇ f est diagonalisable sur K si et seulement si P_f est scindé sur K, et pour toute racine λ_i $(1 \leq i \leq p)$ de P_f on a que la multiplicité algébrique et la multiplicité géométrique de λ_i sont égales.

Autrement dit :

$$f \text{ est diagonalisable}$$

$$\Updownarrow$$

$$dim(E) = dim(E_1) + \ldots + dim(E_p).$$

Somme directe

Définition

Soient $E_1, \ldots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E. On dit qu'ils sont en somme directe si tout vecteur de $\mathcal{E} := E_1 + \ldots + E_p$ se décompose d'une manière unique en somme d'un vecteur de $E_1, \ldots,$ un vecteur de E_p. On écrit alors :

$$\mathcal{E} = E_1 \oplus \ldots \oplus E_p,$$

et on dit que $\mathcal{E}$ est la somme directe des E_i.

Propriété

Soit E de dimension finie. Alors $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_p$ ssi

1. $E = E_1 + \ldots + E_p$ et
2. $dim(E) = dim(E_1) + \ldots + dim(E_p)$.

Somme directe

Propriété

Soit E de dimension finie. Alors $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_p$ ssi pour toutes bases $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p$ de $E_1, \ldots, E_p$ resp., la famille $\bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{B}_i$ est une base de E.

Rappel

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ des valeurs propres deux à deux distinctes de l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ avec vecteurs propres correspondants $v_1, \ldots, v_r$. Alors $v_1, \ldots, v_r$ sont linéairement indépendants.

Corollaire

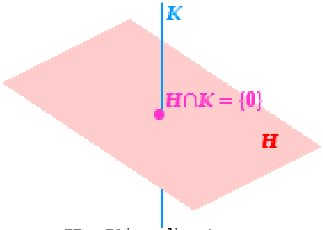
Les espaces propres sont toujours en somme directe.

Somme directe : exemple

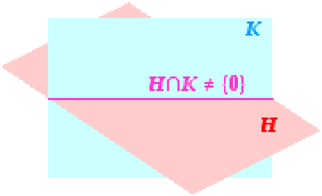
Propriété

Soit E de dimension finie. Alors $E = E_1 \oplus E_2$ ssi

1. $E = E_1 + E_2$;
2. $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.



H + K is a direct sum



H + K is not a direct sum

Quelques réponses

◇ f est diagonalisable sur K si et seulement si P_f est scindé sur K, et pour toute racine λ_i $(1 \leq i \leq p)$ de P_f on a que la multiplicité algébrique et la multiplicité géométrique de λ_i sont égales.

Autrement dit :

$$f \text{ est diagonalisable}$$

$$\Updownarrow$$

$$E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_p.$$

Cas E est un espace Euclidien

Soit $E = \mathbb{R}^n$ ou un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Donné un endomorphisme $f : E \longrightarrow E$.

Est-ce qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{M}(f, \mathcal{B})$ soit une matrice diagonale ?

Cas E est un espace Euclidien

Soit $E = \mathbb{R}^n$ ou un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Donné un endomorphisme $f : E \longrightarrow E$.

Est-ce qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{M}(f, \mathcal{B})$ soit une matrice diagonale ?

En termes matricielles :

Donnée une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Est-ce qu'il existe une matrice orthogonale $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale ?

Matrices orthogonales

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale

ssi $\quad {}^tAA = I_n$

ssi $\quad$ les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$

ssi $\quad A$ préserve la norme

ssi $\quad A$ préserve le produit scalaire

Matrices orthogonales

Propriétés

Soient A et B des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

1. A^{-1} est une matrice orthogonale ;
2. AB est une matrice orthogonale ;
3. Les valeurs propres de A sont 1 et/ou -1.

Procédé de Gram-Schmidt

(Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt)

Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une base d'un sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^n$. Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt est un algorithme qui permet de trouver une base orthogonale de E.

Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthogonale de E, alors

$$\left(\frac{e_1}{\|e_1\|}, \ldots, \frac{e_n}{\|e_n\|}\right)$$

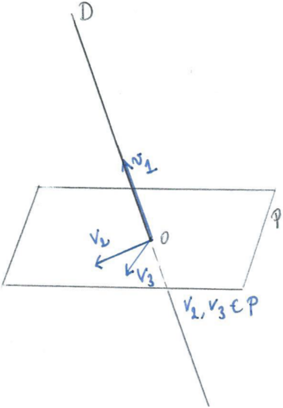
est une base orthonormée de E.

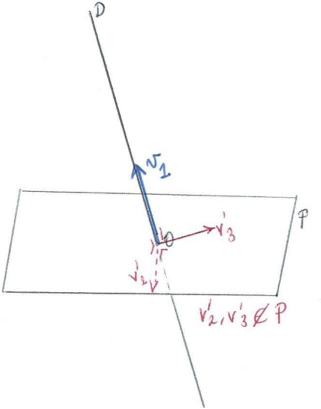
Procédé de Gram-Schmidt

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

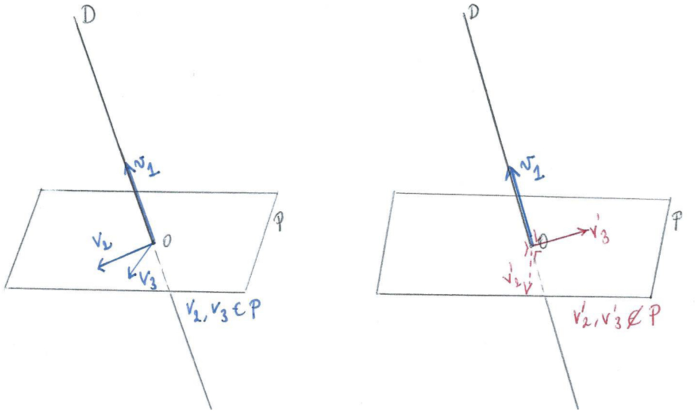
Et si on appliquait l'algorithme de Gram-Schmidt sur une base de vecteurs propres ?

Procédé de Gram-Schmidt





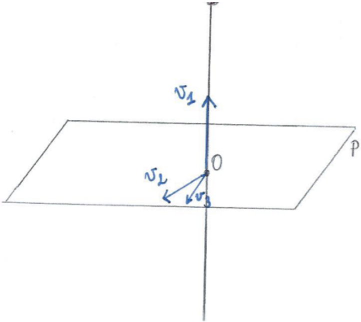
Procédé de Gram-Schmidt

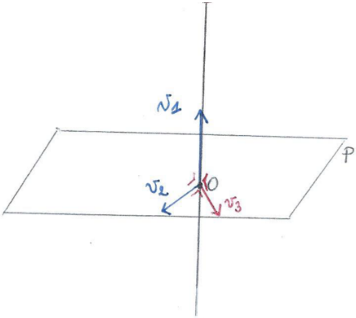


Attention : Appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt ne nous garantit pas que les vecteurs de la base orthonormée soient encore des vecteurs propres !

Procédé de Gram-Schmidt

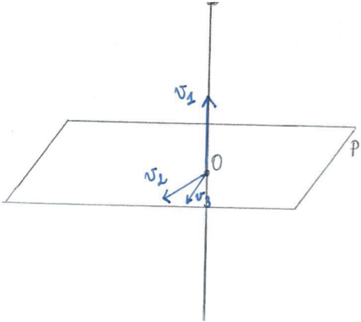
Et si les espaces propres sont orthogonaux ?

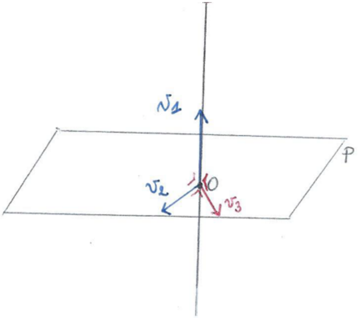




Procédé de Gram-Schmidt

Et si les espaces propres sont orthogonaux ?





$\rightsquigarrow$ on peut appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt sur chaque sous-espace propre !

Matrices symétriques

Définition

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est dite symétrique si ${}^tA = A$.

Matrices symétriques

Définition

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est dite symétrique si ${}^tA = A$.

Lemme

Soit f un endomorphisme d'un espace Euclidien E.
Si la matrice de f est symétrique dans une base orthonormée de E, alors la matrice de f est symétrique dans toute base orthonormée de E.

Matrices symétriques

Définition

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est dite symétrique si ${}^tA = A$.

Lemme

Soit f un endomorphisme d'un espace Euclidien E.
Si la matrice de f est symétrique dans une base orthonormée de E, alors la matrice de f est symétrique dans toute base orthonormée de E.

Définition

Un endomorphisme f de E est symétrique (autoadjoint) si la matrice de f dans une base orthonormée de E est symétrique.

Matrices symétriques

Proposition

1. Soit f un endomorphisme de E. Alors f est symétrique (autoadjoint) ssi $\forall x, y \in E : < f(x), y >=< x, f(y) >$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors A est une matrice symétrique ssi $\forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: $< AX, Y >=< X, AY >$.

But

Diagonalisation des endomorphismes symétriques

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique. Alors :

1. f est diagonalisable sur $\mathbb{R}$
2. Les espaces propres sont deux à deux orthogonaux

Il existe donc une base orthonormée de vecteurs propres de f dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Diagonalisation des matrices symétriques réelles

Soit A une matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors :

1. A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$
2. Les espaces propres sont deux à deux orthogonaux

Il existe donc une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

Etape 1 : Existence de valeurs propres

Théorème de d'Alembert-Gauss = théorème fondamental de l'algèbre

Tout polynôme à coefficients complexes est scindé.

Corollaire

Toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à coefficients complexes admet exactement n valeurs propres (distinctes ou confondues).
Toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients réels admet au plus n valeurs propres (distinctes ou confondues).

Etape 1 : Valeurs propres d'un endomorphisme/d'une matrice symétrique

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique. Alors toutes les valeurs propres de f sont réelles.

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Alors toutes les valeurs propres de A sont réelles.

Etape 2 : Orthogonal à un ensemble

Définition

Soit S un sous-ensemble quelconque de E. On appelle l'orthogonal de S dans E l'ensemble

$$S^{\perp} := \{v \in E \mid v \cdot w = 0, \forall w \in S\}.$$

Lemme

$S^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Etape 2 : Orthogonal à un ensemble

Définition

Soit S un sous-ensemble quelconque de E. On appelle l'orthogonal de S dans E l'ensemble

$$S^{\perp} := \{v \in E \mid v \cdot w = 0, \forall w \in S\}.$$

Lemme

$S^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.

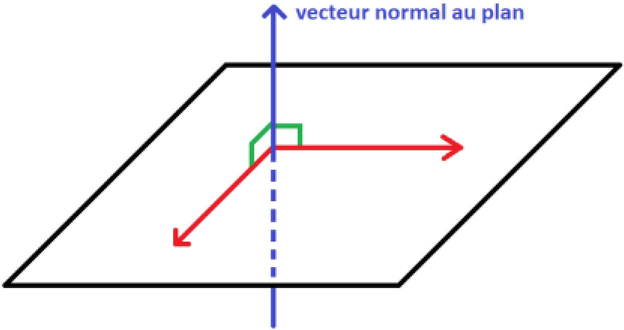
Propriété

Pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a :

1. $$dim(E) = dim(F) + dim(F^{\perp})$$
2. $E = F \oplus F^{\perp}$

Etape 2 : Orthogonal à un ensemble

$E = \mathbb{R}^3$



$$dim(\mathbb{R}^3) = dim(F) + dim(F^{\perp})$$

Etape 3 : sous-espace invariant/stable

Définition

Soit $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme. Un sous-espace vectoriel F de E est dit invariant/stable par f si $f(F) \subset F$.

Exemple : Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \longmapsto (x + y + z, -x, 2z)$.

Alors $F := \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ est stable par f car

$$f((x, y, 0)) = (x + y, -x, 0) \in F, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Etape 3 : Intérêt des sous-espaces stables

Exemple : Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \longmapsto (x + y + z, -x, 2z)$.

Alors $F := \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ est stable par f car

$$f(x, y, 0) = (x + y, -x, 0) \in F.$$

- $((1, 0, 0), (0, 1, 0))$ est une base de F qu'on complète en une base $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ de $\mathbb{R}^3$ et

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}) =$$

Etape 3 : Intérêt des sous-espaces stables

Exemple : Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \longmapsto (x + y + z, -x, 2z)$.

Alors $F := \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ est stable par f car

$$f(x, y, 0) = (x + y, -x, 0) \in F.$$

- $((1, 0, 0), (0, 1, 0))$ est une base de F qu'on complète en une base $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ de $\mathbb{R}^3$ et

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Etape 3 : Intérêt des sous-espaces stables

Exemple : Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \longmapsto (x + y + z, -x, 2z)$.

Alors $F := \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ est stable par f car

$$f(x, y, 0) = (x + y, -x, 0) \in F.$$

- $((1, 0, 0), (0, 1, 0))$ est une base de F qu'on complète en une base $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ de $\mathbb{R}^3$ et

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- $f_{|F} : F \longrightarrow F$ est un endomorphisme bien défini.

Etape 4 : Diagonalisation des endomorphismes symétriques/matrices symétriques réelles

Théorème

Tout endomorphisme symétrique $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable.

Théorème

Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.

Etape 5 : Diagonalisation des endomorphismes symétriques/ matrices symétriques réelles

Théorème

Les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique $f \in \mathcal{L}(E)$/ d'une matrice symétrique sont 2 à 2 orthogonaux.

Résumé : Diagonalisation des endomorphismes symétriques/matrices symétriques réelles

Théorème

Tout endomorphisme symétrique $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable dans une base orthonormée.

Théorème

Soit A une matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Alors il existe une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. A est symétrique réelle donc toutes les valeurs propres sont réelles.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. A est symétrique réelle donc toutes les valeurs propres sont réelles. En effet :

$$P_A(x) = -(x-1)(x+2)^2$$

et donc les valeurs propres sont 1 et -2.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. A est symétrique réelle donc toutes les valeurs propres sont réelles. En effet :

$$P_A(x) = -(x-1)(x+2)^2$$

et donc les valeurs propres sont 1 et -2.

2. A est symétrique réelle donc A est diagonalisable et il existe donc une base de vecteurs propres.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. A est symétrique réelle donc toutes les valeurs propres sont réelles. En effet :
$$P_A(x) = -(x-1)(x+2)^2$$
et donc les valeurs propres sont 1 et -2.
2. A est symétrique réelle donc A est diagonalisable et il existe donc une base de vecteurs propres. En effet :
$$mult_{alg}(-2) = dim(E_{-2}) = dim(Vect((-1,1,0),(-1,0,1)))$$
et
$$mult_{alg}(1) = dim(E_1) = dim(Vect(1,1,1)),$$
et $((-1,1,0),(-1,0,1),(1,1,1))$ est une base de vecteurs propres.

Exemple : suite

3. On applique l'algorithme de Gram-Schmidt sur chaque espace propre :

$$\left(\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\right) \text{ est une b.o.n. de } E_{-2}$$

$$\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) \text{ est une b.o.n. de } E_1$$

4. A est symétrique réelle donc les espaces propres sont 2 à 2 orthogonaux.

Exemple : suite

3. On applique l'algorithme de Gram-Schmidt sur chaque espace propre :

$$\left(\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\right) \text{ est une b.o.n. de } E_{-2}$$

$$\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) \text{ est une b.o.n. de } E_1$$

4. A est symétrique réelle donc les espaces propres sont 2 à 2 orthogonaux. En effet :

$$E_{-2} \perp E_1.$$

Ainsi l'union des b.o.n. des espaces propres est une b.o.n. de vecteurs propres de $\mathbb{R}^n$!

Exemple : suite

5. La matrice de passage P de la base canonique vers la nouvelle b.o.n. de vecteurs propres est orthogonale :

$$P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & \sqrt{3}/3 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & \sqrt{3}/3 \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} & \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}.$$

Exemple : suite

5. La matrice de passage P de la base canonique vers la nouvelle b.o.n. de vecteurs propres est orthogonale :

$$P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & \sqrt{3}/3 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & \sqrt{3}/3 \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} & \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}.$$

6. $P^{-1}AP$ est la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Question

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe une matrice orthogonale $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP$ soit diagonale.

Qu'est-ce que cela implique sur A ?

Résumé

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Il existe une matrice orthogonale $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que
${}^tPAP$ soit diagonale
si et seulement si
A est symétrique.