Amphi 1 : Déterminants
Fondements Mathématiques 3

Ann Lemahieu

September 9, 2019

Définition

Déterminant 2×2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(K)$. Le déterminant $det(A)$ de A est l'élément $ad - bc$ de K.

Déterminant 3×3

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(K)$. Le déterminant $det(A)$ de A est l'élément $a_{1,1}det(A_{1,1}) - a_{2,1}det(A_{2,1}) + a_{3,1}det(A_{3,1})$ de K, où $A_{i,j}$ est la matrice obtenue en enlevant à A sa i-ème ligne et sa j-ème colonne.

Propriétés

Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(K)$ (resp. $\mathcal{M}_3(K)$). Alors :

- $det(AB) = det(A)det(B)$
- $det(I_2) = det(I_3) = 1$
- $det({}^tA) = det(A)$
- La matrice A est inversible si et seulement si $det(A) \neq 0$.

Propriétés

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$.

1. Supposons que la matrice A' est obtenue à partir de la matrice A après avoir permuté deux colonnes adjacentes. Alors

$$det(A') = -det(A).$$

2. Supposons que la matrice A' est obtenue à partir de la matrice A après avoir permuté deux colonnes quelconques. Alors

$$det(A') = -det(A).$$

3. Supposons que la matrice A a deux colonnes identiques. Alors

$$det(A) = 0.$$

Propriétés

SANS PREUVE

1. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$, on a que
$$det(A) = det({}^tA).$$
2. On peut développer le déterminant par rapport à n'importe quelle ligne ou colonne.
3. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$, on a que
$$det(AB) = det(A)det(B).$$

Comportement du déterminant par rapport aux opérations élémentaires de Gauss

1. Supposons que la matrice A' est obtenue à partir de la matrice A après avoir permuté deux lignes quelconques. Alors
$$det(A') = -det(A).$$
2. Si la matrice A' est obtenue à partir de la matrice A en multipliant une ligne par un scalaire λ, alors
$$det(A') = \lambda det(A).$$
3. Si la matrice A' est obtenue à partir de la matrice A en additionnant un multiple d'une ligne de A à une autre ligne de A, alors
$$det(A') = det(A).$$

Opérations élémentaires de Gauss

Les opérations élémentaires sur un ensemble de vecteurs d'un K-espace vectoriel E sont :

- La multiplication d'un des vecteurs par un scalaire non nul de K
- L'ajout d'un multiple d'un des vecteurs de la famille à un autre vecteur
- L'échange de deux vecteurs

Propriété

Les opérations élémentaires sur un ensemble de vecteurs d'un K-espace vectoriel E ne changent pas le sous-espace vectoriel engendré par cet ensemble de vecteurs.

Test 1 : déterminant

Vrai ou faux ?

- Si A a deux lignes identiques, alors $det(A) = 0$
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $B = rA$, alors $det(B) = rdet(A)$
- Si B s'obtient par des opérations élémentaires sur les lignes de A, alors
$$det(A) = 0 \Leftrightarrow det(B) = 0$$
- $$det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 42 & 5 & 9 \end{pmatrix} = -27$$
- $det(A + B) = det(A) + det(B)$