# Feuille 1 : Déterminants

**Exercice 1** *Calculer le déterminant des matrices suivantes. En déduire, en fonction des paramètres $a, b, c \in \mathbb{R}$, lesquelles de ces matrices sont inversibles.*

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a-b & a \\ a & a+b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & -3 & 18 \\ 0 & b & 9 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2** *Calculer les déterminants suivants en développant par rapport à une ligne ou à une colonne.*

$$\begin{vmatrix} 13 & 0 & 0 & 39 \\ 17 & -6 & 3 & 11 \\ 8 & 4 & 0 & 5 \\ -3 & 0 & 0 & -9 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

**Exercice 3** *Calculer à l'aide d'opérations élémentaires le déterminant des matrices suivantes. Calculer l'inverse si elle existe.*

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & -2 & 4 \\ 8 & 9 & 5 & -11 \\ 8 & 3 & -1 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 4** *Calculer les déterminants suivants.*

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

**Exercice 5**

1. *Est-ce que les vecteurs* $(1,0,2,1), (2,1,5,-1), (0,-1,-1,3)$ *sont linéairement indépendants ?*
2. *Déterminer le rang de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. *En déduire la dimension de l'espace vectoriel* $E = Vect((1,2,0),(0,1,-1),(2,5,-1),(1,-1,3))$.

**Exercice 6**

1. *Montrer que les vecteurs* $(1,0,2), (3,0,1), (2,-1,2)$ *sont linéairement indépendants.*
2. *En déduire que les vecteurs* $(1,3,2), (0,0,-1), (2,1,2)$ *sont linéairement indépendants.*

**Exercice 7** *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(K)$ *une matrice inversible. Montrer que* $det(A^{-1}) = 1/det(A)$.

**Exercice 8** *Soit* $A$ *une matrice dans* $\mathcal{M}_n(K)$ *de la forme*

$$\begin{pmatrix} P & Q \\ 0 & R \end{pmatrix},$$

*où* $P$ *est une matrice de* $\mathcal{M}_m(K)$, *où* $Q$ *est une matrice de* $\mathcal{M}_{m\times(n-m)}(K)$, *où* $R$ *représente une matrice de* $\mathcal{M}_{(n-m)\times(n-m)}(K)$ *et où* $0$ *représente la matrice* $0$ *de taille* $(n-m)\times m$. *Nous allons compléter le raisonnement suivant afin de montrer que*

$$det(A) = det(P)det(R).$$

*Nous allons noter* $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ *et pour une matrice* $M$ *quelconque nous notons* $M_{i,j}$ *pour la matrice obtenue à partir de* $M$ *en enlevant la i-ème ligne et la j-ème colonne.*
*Nous argumentons par récurrence sur l'entier* $m$. *Si* $m = 1$, *alors le développement du déterminant de* $A$ *par rapport à la première colonne donne*

$$det(A) = \text{....................................................} = det(P)det(R),$$

*car* $P =$ ......... *La formule est donc valable pour* $m = 1$.
*Supposons maintenant que* $m > 1$ *et que l'énoncé est vrai pour les matrices de la même forme que* $A$, *mais où la matrice en haut à gauche est de taille plus petite. Nous développons le déterminant de* $A$ *par rapport à la première colonne :*

$$det(A) = \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}a_{i,1}det(A_{i,1}).$$

*Nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence sur les matrices* $A_{i,1}$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ *car*
..........................................................................................................................................
*et nous pouvons donc écrire*

$$det(A_{i,1}) = det(P_{i,1})\cdot det(.....).$$

*Comme*

$$\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}a_{i,1}det(P_{i,1}) = det(.....),$$

*nous obtenons que*

$$det(A) = det(P)det(R).$$

*Ceci complète la preuve.*

**Exercice 9** *Vrai ou faux ? Montrer ou donner un contre-exemple.*

1. *Soient* $A, B, C, D$ *des matrices de taille* $n \times n$, *alors*
$$\left|\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right| = |A|.|D| - |B|.|C|.$$
2. *Soient* $A$ *et* $B$ *des matrices de taille* $n \times n$, *alors* $det(A + B) = det(A) + det(B)$.
3. *Soient* $A \in \mathcal{M}_n(K)$ *et* $r \in K$. *Alors* $det(rA) = r^n det(A)$.

**Exercice 10**

1. *Les trois points* $A(-3, 3), B(5, 2)$ *et* $C(2, 1)$ *du plan cartésien sont-ils alignés ? Si oui, est-ce que la droite qui les contient est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$ *? Si oui, en donner des équations.*
2. *Les quatre points* $A(0, 0, 0), B(1, 1, 1), C(3, 4, 5)$ *et* $D(0, 2, 4)$ *donnés en coordonnées cartésiennes sont-ils coplanaires ? S'ils déterminent un plan, est-ce que ce plan est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *? Si oui, en donner des équations.*

# Exercices supplémentaires :

**Exercice 11** *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

*pour* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. *Montrer que*

$$det(A) = \prod_{j>i} (a_j - a_i).$$

*Ce déterminant est appelé le déterminant de Vandermonde.*
*Indication : Exécuter l'opération élémentaire* $L_i \leftarrow L_i - a_1 L_{i-1}$ *en partant de* $L_n$ *et en remontant jusqu'à* $L_2$.

**Exercice 12** *Soient* $A$ *et* $B$ *deux matrices dans* $\mathcal{M}_n(K)$ *telles que* $AB = I_n$. *Montrer que* $A$ *est inversible et que* $B = A^{-1}$.

**Exercice 13** *Supposons que* $A$ *est une matrice inversible telle que* $A$ *et* $A^{-1}$ *consistent entièrement de nombres entiers. Montrer que le déterminant de* $A$ *est égal à* $1$ *ou à* $-1$.

**Exercice 14** *Montrer de deux façons que si une matrice a une ligne ou une colonne de* $0$, *alors son déterminant vaut* $0$.

**Exercice 15** *Montrer en utilisant la technique d'échellonage que si les colonnes de la matrice* $A \in \mathcal{M}_n(K)$ *sont linéairement dépendentes, alors* $det(A) = 0$.

**Exercice 16** *Une matrice carrée* $A$ *est appelée une matrice antisymétrique si* ${}^tA = -A$.

1. *Donner un exemple d'une matrice antisymétrique de taille* $2 \times 2$ *et une de taille* $3 \times 3$, *différente de la matrice* $(0)$.
2. *Montrer que le déterminant d'une matrice antisymétrique avec un nombre de lignes impair égale* $0$.
3. *Est-ce toujours vrai pour les matrices antisymétriques avec un nombre de lignes pair ?*