Feuille 2 : Vecteurs propres, valeurs propres

Exercice 1 *Soit f la projection de $\mathbb{R}^3$ sur le plan P d'équation $x + 2y + 3z = 0$ parallèlement à la droite D d'équation $x/3 = y/2 = z$.*

1. *Donner un vecteur directeur w de la droite D.*
2. *Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.*
   Rappel : l'image $f(v)$ est définie par $f(v) = v - \lambda w$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(v) \in P$.
3. *Faire un dessin schématique du plan P et de la droite D. Marquer une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f sur votre dessin. Quelle est la matrice A de f dans cette base de vecteurs propres ?*

Exercice 2 *Montrer que la matrice suivante n'a pas de valeurs propres réelles. Interpréter géométriquement.*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

1. *Montrer que λ est valeur propre d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ si et seulement si le rang de la matrice $(A - \lambda I_n)$ est strictement plus petit que n.*
2. *Soit $n \geqslant 2$. Montrer que $a - 1$ est valeur propre de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 4 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. *Montrer que $v = (1, -1, 2)$ est un vecteur propre de A. Déterminer l'espace propre de sa valeur propre. En donner une base.*
2. *Montrer que 4 est une valeur propre de A et déterminer l'espace propre correspondant. En donner une base.*
3. *Est-ce que 0 est une valeur propre de A ?*
4. *Proposer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A.*

Exercice 5 *Pour quelles valeurs réelles de a est-ce que la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a des valeurs propres réelles ? Formuler votre réponse par une inégalité.

Exercice 6 *Montrer que les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les éléments sur la diagonale.*

Exercice 7 *On considère l'espace vectoriel* $\mathbb{R}_2[x]$ *de polynômes de degré au plus* 2 *à coefficients réels.*

1. *Quelle est la dimension de* $\mathbb{R}_2[x]$ *? Donner une base de* $\mathbb{R}_2[x]$*. On la désignera par* $\mathcal{B}$.
2. *On considère l'application linéaire* $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ *définie par* $f(P(x)) = P(x+1)$*. Montrer que* f *est une application linéaire et donner sa matrice dans la base* $\mathcal{B}$.
3. *Déterminer tous les vecteurs propres de* f.

Exercice 8

1. *Soit* f *une application linéaire. Montrer que* f *est injective si et seulement si* $Ker(f) = \{0\}$.
2. *Soit* $f : E \longrightarrow E$ *un endomorphisme. Montrer que* 0 *est une valeur propre de* f *si et seulement si* f *n'est pas injectif.*

Exercice 9 *Vrai ou faux ?*

1. *Soient* A *et* B *des matrices semblables. Alors* A *et* B *ont mêmes valeurs propres.*
2. *Soient* A *et* B *des matrices semblables. Alors* A *et* B *ont mêmes vecteurs propres.*
3. *Soient* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *les valeurs propres de* A*, alors* $\lambda_1 - \alpha, \ldots, \lambda_n - \alpha$ *sont les valeurs propres de* $A - \alpha I_n$.
4. *Soit* A *une matrice inversible. Si* v *est vecteur propre de* A *de valeur propre* λ*, alors* v *est vecteur propre de* A^{-1} *de valeur propre* λ^{-1}.
5. *Si* λ *est valeur propre de* A*, alors* λ^2 *est une valeur propre de* A^2.
6. A *et* ${}^tA$ *ont les mêmes valeurs propres.*
7. *Si* $A \in \mathcal{M}_n(K)$ *est diagonalisable, alors il existe une unique matrice* P *telle que* $P^{-1}AP$ *soit diagonale.*
8. *Si* A *est diagonalisable, alors* A^2 *est diagonalisable.*

Exercices supplémentaires :

Exercice 10 *Soient* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *les valeurs propres de* $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$*. Utiliser le théorème fondamental de l'algèbre afin de montrer que* $det(f) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$.

Exercice 11 *Soient* A *et* B *des matrices semblables. Soit* $P \in GL_n(K)$ *telle que* $B = P^{-1}AP$*. Soit* v *un vecteur propre de* B*. Montrer que* Pv *est un vecteur propre de* A.

Exercice 12 *Soient* f *et* g *deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que* $f \circ g$ *et* $g \circ f$ *ont mêmes valeurs propres.*