Feuille 3 : Diagonalisation

Exercice 1 *Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et soit (e_1, e_2, e_3) une base de E. Soit $\mathcal{A} : E \longrightarrow E$ l'application linéaire telle que*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(e_1) &= 5e_1 + 2e_2 + 3e_3 \\ \mathcal{A}(e_2) &= 2e_1 - e_2 \\ \mathcal{A}(e_3) &= 3e_1 + e_3 \end{aligned}$$

1. *Calculer les valeurs propres de $\mathcal{A}$.*
2. *Donner les espaces propres de $\mathcal{A}$.*
3. *Est-ce qu'il existe une base (u_1, u_2, u_3) de vecteurs propres de E ?*
4. *Si oui, quelle est la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (u_1, u_2, u_3) ?*
5. *Donner la matrice de $\mathcal{A}$ dans la base (u_1, u_2, u_3).*
6. *Donner la matrice de $\mathcal{A}$ dans la base (u_1, u_3, u_2).*

Exercice 2

1. *Calculer les valeurs propres et vecteurs propres des matrices suivantes à coefficients réels.*
2. *Donner la multiplicité algébrique et la multiplicité géométrique des valeurs propres.*
3. *Déterminer lesquelles des matrices suivantes à coefficients réels sont diagonalisables.*
4. *Donner pour ces matrices M une matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que $P^{-1}MP$ soit une matrice diagonale, si une telle matrice P existe.*
5. *Lesquelles de ces matrices sont diagonalisables sur $\mathbb{C}$?*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Diagonaliser A.*
2. *Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.*

Exercice 4 *Soit f l'application suivante :*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2[X] \\ P(x) & \longmapsto & (2X+1)P(x) - (X^2-1)P'(x) \end{array}$$

Montrer que f est bien définie et linéaire. Déterminer les valeurs propres de f et, si c'est possible, diagonaliser f.

Exercice 5 *Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par f, i.e. $\forall v \in F, f(v) \in F$. Soit $g : F \longrightarrow F$ la restriction de f au sous-espace F. Montrer que le polynôme caractéristique P_g de g divise le polynôme caractéristique P_f de f.*
Indication : compléter une base de F en une base $\mathcal{B}$ de E. Quelle est la forme de la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$?

Exercice 6 *Soit x_k la taille de la population X après k ans et y_k la taille de la population Y après k ans. Les populations évoluent selon les équations :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_k & = & 6y_{k-1} \\ y_k & = & 1/4x_k + 1/2y_k \end{array} \right. \quad \text{et telles que } x_0 = 2, y_0 = 1.$$

Trouver les tailles des populations X et Y après 2019 ans.

Exercices supplémentaires :

Exercice 7 *Soit $f : V \longrightarrow W$ une application linéaire. Soient $\mathcal{V}$ une base de V et $\mathcal{W}$ une base de W. Montrer qu'il existe des matrices P et Q inversibles telles que*

$$Q^{-1}\mathcal{M}(f, \mathcal{W}, \mathcal{V})P = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où I_r est la matrice identité de taille $r \times r$ et où 0 est une matrice qui contient seulement des 0 où qui n'apparaît pas.

Exercice 8

Soit f l'application linéaire

$$\begin{array}{llll} f : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \mapsto & (2x + y - \sqrt{2}z, x + 2y + \sqrt{2}z, -\sqrt{2}x + \sqrt{2}y + z). \end{array}$$

1. *Donner la matrice $\mathcal{M}(f, \mathcal{E})$ de f dans la base canonique $\mathcal{E} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ de $\mathbb{R}^3$.*
2. *Est-ce qu'il existe une base $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathcal{M}(f, \mathcal{V})$, la matrice de f dans la base $\mathcal{V}$, soit une matrice diagonale ? Si oui, donner une telle base et la matrice diagonale correspondante.*

Exercice 9 *Considérons l'endomorphisme $f : \mathbb{R}[x]_{\leqslant n} \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leqslant n} : P \longmapsto (x^2 - 1)P'' - P'$. Est-il diagonalisable ?*

Exercice 10 *Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Démontrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.*

Exercice 11 *Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Expliquer sans calcul pourquoi la matrice A n'est pas diagonalisable.*

Exercice 12 *Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Pour quelles valeurs de a, b, c est-ce que la matrice A est-elle diagonalisable ?*