

Feuille 4 : Espaces Euclidiens et diagonalisation des matrices symétriques réelles

Exercice 1 *(Gram-Schmidt, cas de 2 vecteurs) Soient v_1, v_2 deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Soit*

$$v_2' := v_2 - \frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\|^2} v_1.$$

Montrer que $Vect(v_1, v_2) = Vect(v_1, v_2')$.

Exercice 2 *Soient $A = Vect(v_1, \dots, v_k)$ et $B = Vect(w_1, \dots, w_m)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Montrer que A et B sont des sous-espaces orthogonaux si et seulement si $< v_i, w_j >= 0$, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ et pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$.*
Rappel : deux sous-espaces A et B de $\mathbb{R}^n$ sont orthogonaux si $< v, w >= 0$ pour tout vecteur v de A et pour tout vecteur w de B.

Exercice 3

1. *Soit $v = (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$ et soit $\{v\}^\perp = \{w \in \mathbb{R}^3 \mid v \cdot w = 0\}$ le sous-espace orthogonal à v. Trouver une base de $\{v\}^\perp$ et déterminer $\left(\{v\}^\perp\right)^\perp$.*
2. *Soient $v = (1, 0, 1, -1)$ et $w = (0, 1, 1, 2)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Trouver une base de $\{v\}^\perp \cap \{w\}^\perp$ et déterminer $(Vect(v, w))^\perp$.*
3. *Soit $\mathcal{B}$ la famille $((1, 1, -1), (1, -2, -1), (1, 0, 1))$. Montrer que c'est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$. En déduire que $\mathcal{B}' = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, -1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)\right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Calculer à l'aide du produit scalaire les coordonnées de $(1, 1, 1)$ dans $\mathcal{B}$ et dans $\mathcal{B}'$.*

Exercice 4 *Lesquelles des matrices suivantes sont orthogonales ?*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & -4/5 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 2 \\ -2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} cos(\theta) & 0 & -sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ sin(\theta) & 0 & cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Exercice 5 *Soient $v_1 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), v_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), v_3 = (-1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Soit $\mathcal{B} := (v_1, v_2, v_3)$.*

1. *Montrer que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.*
2. *Soit v et w les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées $(2, 3, -1)$, resp. $(3, -1, 3)$ dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que $v \perp w$.*
3. *Soit $\mathcal{B}'$ la base $((1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 1))$ de $\mathbb{R}^3$. Soit v' le vecteur de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées $(2, 3, -1)$ dans la base $\mathcal{B}'$. Soit w' le vecteur de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées $(3, -1, 3)$ dans la base $\mathcal{B}'$. Montrer que v' et w' ne sont pas orthogonaux.*

Exercice 6

1. *Donner une base orthonormée qui engendre le même sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *que l'ensemble*
$$\{(1,2,-1),(5,0,1),(-3,4,-3)\}.$$
2. *Soit* v_1 *le vecteur* $(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ *de* $\mathbb{R}^3$. *Trouver* $v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ *tels que* (v_1,v_2,v_3) *soit une base orthonormée de* V.

Exercice 7 *Donner pour les matrices* M *réelles symmétriques ci-dessous une matrice orthogonale* $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *telle que* $P^{-1}MP$ *soit une matrice diagonale.*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercices supplémentaires :

Exercice 8 *Vrai ou faux ?*

1. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Alors* ${}^tAA = I_n$ *si et seulement si* $A^tA = I_n$.
2. *Si la matrice* A *préserve les angles, alors* A *est une matrice orthogonale.*
3. *Si* A *est une matrice diagonalisable par une matrice orthogonale, alors* A *est symétrique.*
4. *La somme de deux matrices symétriques est symétrique.*
5. *Le produit de deux matrices symétriques est symétrique.*
6. *Pour toute matrice réelle* A, *les valeurs propres de la matrice* ${}^tAA$ *sont réelles.*

Exercice 9 *On considère l'espace Euclidien* $\mathbb{R}^4$ *muni du produit scalaire canonique. Soit* F *le sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$ *défini par :*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Déterminer $F^\perp$.

.