Rappels d'algèbre linéaire
Fondements Mathématiques 3

Ann Lemahieu

September 9, 2019

Définition

Espace vectoriel

Soit K un corps. Un K-espace vectoriel E est la donnée d'un ensemble E muni de deux lois :

- une loi dite d'addition et notée $+$:

$$\begin{array}{rcl} E \times E & \longrightarrow & E \\ (u, v) & \longmapsto & u + v \end{array}$$

- une loi dite de multiplication par un scalaire et notée multiplicativement :

$$\begin{array}{rcl} K \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, u) & \longmapsto & \lambda u \end{array}$$

telles que

Définition

Espace vectoriel

(i) $\forall u, v, w \in E : (u+v)+w = u+(v+w)$

(ii) il existe un élément noté $0 \in E$ tel que
$\forall u \in E : u+0 = u = 0+u$

(iii) $\forall u \in E, \exists v \in E$ tel que $u+v = 0 = v+u$

(iv) $\forall u, v \in E : u+v = v+u$

(v) $\forall \lambda, \mu \in K, \forall u, v \in E :$

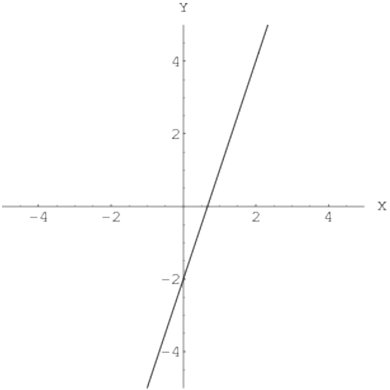
$$\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u, \quad (\lambda+\mu)u = \lambda u + \mu u,$$

$$\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v, \quad 1u = u$$

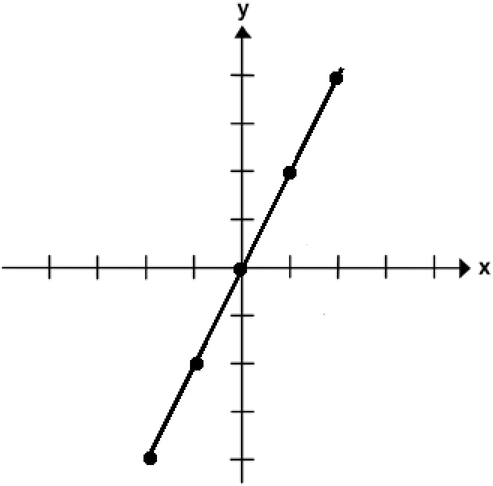
Exemples

- $K = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^n$
- $K = \mathbb{C}$ et $E = \mathbb{C}^n$
- $E = \mathcal{M}_{m\times n}(K)$
- $K = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}[x]$

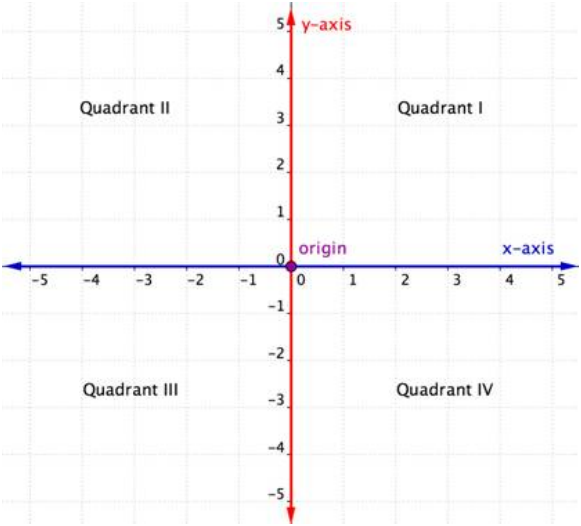
Exemple ou contre-exemple ?



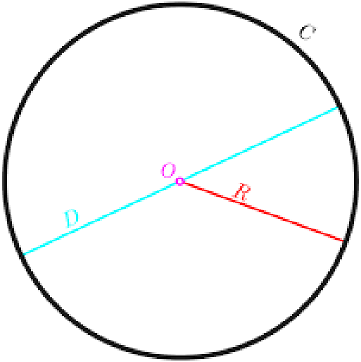
Exemple ou contre-exemple ?



Exemple ou contre-exemple ?



Exemple ou contre-exemple ?



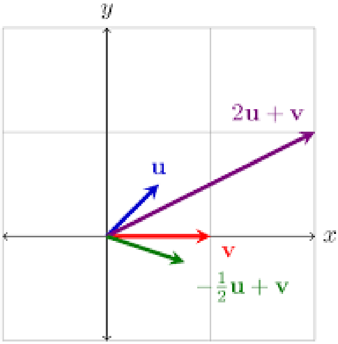
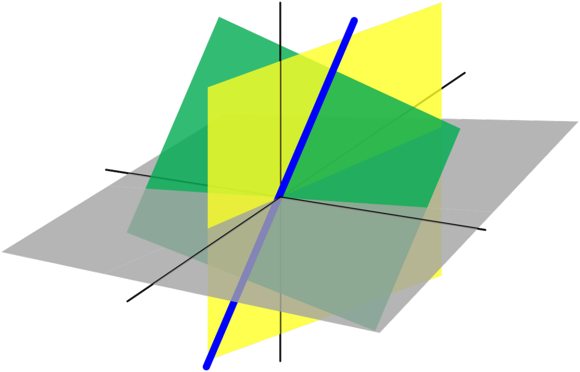


Figure 1: Vector combinations.

Exemple ou contre-exemple ?



Définition

Application linéaire

Soient E et F deux K-espaces vectoriels. Une application $f : E \longrightarrow F$ est linéaire si :

- $\forall u, v \in E : f(u+v) = f(u) + f(v)$
- $\forall u \in E, \forall \lambda \in K : f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

Exemples

- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto 7x$
- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \longmapsto (7x - 3y, x + y)$
- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto 0$
- $f : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x] : p(x) \longmapsto p(x)q(x)$, avec $q(x) \in \mathbb{R}[x]$

Exemple ou contre-exemple ?

- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x + 2$
- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^3$
- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \longmapsto (7x^2 - 3y, x + y)$
- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \longmapsto x$

Définition

Combinaison linéaire

Soient $v_1, v_2, \ldots, v_p$ des vecteurs d'un K-espace vectoriel E. Une combinaison linéaire de $v_1, v_2, \ldots, v_p$ est un vecteur de E s'écrivant

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_p v_p,$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in K$.

Espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

Soient $v_1, v_2, \ldots, v_p$ des vecteurs d'un K-espace vectoriel E. L'espace vectoriel $Vect(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ engendré par les vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_p$ est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de $v_1, v_2, \ldots, v_p$.

Définition

Vecteurs libres

Soient $v_1, v_2, \ldots, v_p$ des vecteurs d'un K-espace vectoriel E. La famille $(v_1, \ldots, v_p)$ est dite libre (ou linéairement indépendante) si l'égalité

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_p v_p = 0$$

entraîne la nullité de tous les coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in K$.

Vecteurs liés

Soient $v_1, v_2, \ldots, v_p$ des vecteurs d'un K-espace vectoriel E. La famille $(v_1, \ldots, v_p)$ est dite liée (ou linéairement dépendante) si elle n'est pas libre, i.e. s'il existe une combinaison linéaire nulle

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_p v_p = 0$$

avec des coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in K$ non tous nuls.

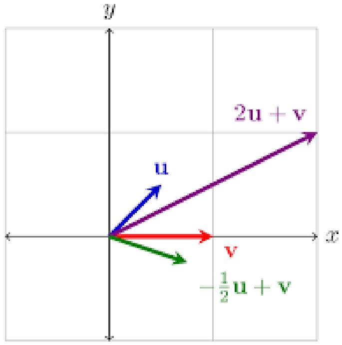
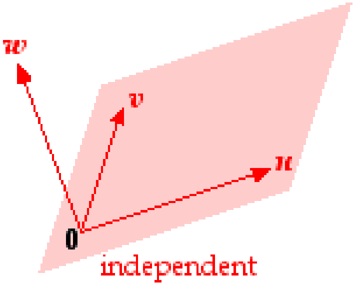
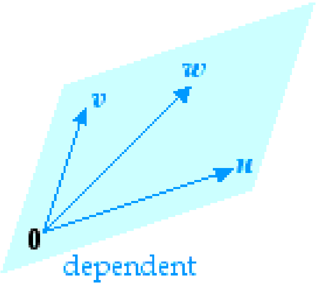


Figure 1: Vector combinations.

Exemples





Définition

Famille génératrice

Soient $v_1, v_2, \ldots, v_p$ des vecteurs d'un K-espace vectoriel E. On dit que $(v_1, \ldots, v_p)$ est une famille génératrice de E si $Vect(v_1, \ldots, v_p) = E$.

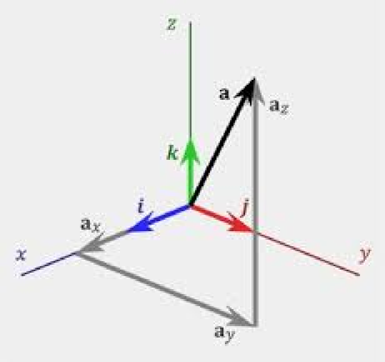
Base

Soient $v_1, v_2, \ldots, v_p$ des vecteurs d'un K-espace vectoriel E. On dit que $(v_1, \ldots, v_p)$ est une base de E si $(v_1, \ldots, v_p)$ est une famille génératrice de E et si $(v_1, \ldots, v_p)$ est une famille libre.

Dimension

Soit E un K-espace vectoriel qui possède une base de n vecteurs. L'entier n est appelé la dimension de E.

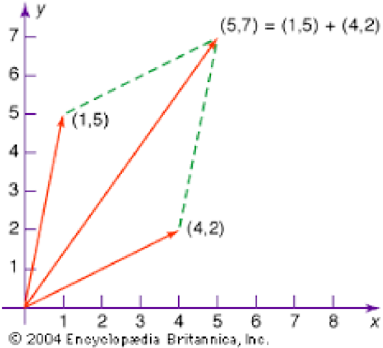
Exemples



Coordonnées

Soient $v_1, v_2, \ldots, v_p$ une base de E. Tout vecteur de E s'écrit d'une unique façon comme combinaison linéaire de $v_1, v_2, \ldots, v_p$.

Coordonnées



Soit $\mathcal{B}$ la base $((1,0),(0,1))$ de $\mathbb{R}^2$. Les coordonnées du vecteur $(5,7)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont 5 et 7. Soit $\mathcal{B}'$ la base $((4,2),(1,5))$ de $\mathbb{R}^2$. Les coordonnées du vecteur $(5,7)$ dans la base $\mathcal{B}'$ sont 1 et 1.

Résultats importants !

Théorème

Soit E un K-espace vectoriel de dimension n. Alors :

- Une famille libre de n vecteurs de E est une base de E.
- Une famille génératrice de n vecteurs de E est une base de E.

Théorème

Soient E et F deux K-espaces vectoriels et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soient $u_1, \ldots, u_n$ des vecteurs de F. Alors il existe une unique application linéaire $f : E \longrightarrow F$ telle que
$f(e_1) = u_1, \ldots, f(e_n) = u_n$.