Feuille de travaux dirigés n°1
Exercices de révision

Exercice 1:
Soit X une variable aléatoire dont la loi est définie par :

$$P(X=-1)=0.2, \quad P(X=0)=0.1, \quad P(X=4)=0.3, \quad P(X=5)=0.4.$$

1. Calculer $P(X \leq 3)$ et $P(X > 2)$
2. Calculer l'espérance de X.

Exercice 2:
On lance deux dés équilibrés.

1. Modéliser l'expérience.
2. Quelle est la probabilité pour obtenir au moins un 4.
3. Quelle est l'espérance de la somme des deux dés?

Exercice 3:
Pour les expériences aléatoires suivantes, donner l'univers Ω et les probabilités qui les décrivent. Puis pour chacune des variables aléatoires étudiées, préciser le nom de la loi quand cela est possible, ses paramètres et l'expression de $P(X=k)$

1. On lance un dé 20 fois. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de 5 obtenus lors des 20 lancers. Calculer en plus la probabilité d'obtenir moins de 3 fois un 5.
2. Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On prend dans cette urne une boule au hasard, on la remet et on ajoute une boule de la même couleur que celle tirée. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches dans l'urne.
3. On recommence le jeu précédent, avec X étant toujours la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches dans l'urne. Donner également la loi de la variable aléatoire égale au nombre de boules noires et son espérance.
4. Au bord de l'A7, un étudiant fait du stop. En cette saison, un vingtième des automobilistes s'arrête pour prendre un stoppeur. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de véhicules que l'étudiant verra passer avant d'être pris en stop. Calculer en plus la probabilité que l'étudiant monte dans la quatrième voiture et la probabilité qu'il voit passer au moins 6 voitures sans être pris.

Exercice 4:
Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n,p)$ et Y une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n',p)$. On suppose X et Y indépendantes.

1. Donner la définition de l'indépendance de X et Y

2. Donner la loi de $X + Y$.
3. Faire de même si l'on suppose que X et Y sont respectivement des lois de Poisson de paramètre λ et μ.

Exercice 5:
Dans un aérodrome, la durée du processus d'atterrissage d'un avion, mesurée en minutes, est une variable aléatoire T dont la densité de probabilité est $f(t) = t.e^{-t}$ si $t \geq 0$ et 0 sinon.

1. Vérifier que f est une fonction de densité.
2. Calculer $P(T > 2)$, $P(1 < T < 3)$.
3. Calculer l'espérance de T.

Exercice 6:
On désigne par $X_1, \ldots, X_n$ les rendements en quintaux par hectare de n parcelles ensemencées avec une même variété de céréales. On suppose ces variables indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
On pose $M = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$.

1. Calculer l'espérance et la variance de M.
2. Quelle est la loi de M?
3. On suppose que $\sigma = 2.5$. Combien de parcelles faut-il observer pour que $P(\mu - 1 \leq M \leq \mu + 1) > 0.99$?

Exercice 7:
On considère 3 urnes notées U_1, U_2 et U_3. U_1 contient 2 boules noires et 3 boules rouges. U_2 contient une boule noire et 4 boules rouges. U_3 contient 3 boules noires et 4 boules rouges.
On tire une boule dans U_1 et une dans U_2 que l'on met toutes deux dans U_3. On tire alors une boule dans U_3,elle est noire. Quelle est la probabilité que la boule tirée dans U_1 soit rouge?

Exercice 8:
Un filtre à particule reçoit un flux de particules dont le nombre par unité de temps suit une loi de Poisson de paramètre λ. Il filtre ce flux de telle sorte que les particules non toxiques sont rejetées dans l'air. Ces particules non toxiques sont présentes en proportion p dans le gaz originel. Quelle est la loi du nombre de particules rejetées dans l'air par unité de temps?

Exercice 9:
Lorsqu'un gène porte deux allèles A et a, un individu peut avoir l'un des trois génotypes AA, Aa ou aa. Il transmet alors aléatoirement un deux allèles à son enfant.

1. Calculer $P(AA)$, $P(Aa)$ et $P(aa)$ pour un enfant dont les deux parents ont pour génotypes respectifs
   (a) AA et AA
   (b) Aa et AA
   (c) aa et AA
   (d) Aa et Aa
2. on considère une population (génération 0) pour laquelle les proportions respectives des trois génotypes AA, Aa et aa sont p_0, q_0 et r_0. On admet que l'appariement est aléatoire.
   (a) Exprimer en fonction de p_0, q_0 et r_0 la probabilité p_1 qu'un enfant (génération 1) de la génération 0 ait le génotype AA

(b) Mêmes questions pour q_1 et r_1.

3. Soit $\alpha = p_0 - r_0$. Montrer que $p_1 = \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^2$, $q_1 = \frac{1-\alpha^2}{2}$ et $p_1 = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2$
4. Calculer $p_1 - r_1$. Que peut-on en déduire sur p_n, q_n et r_n pour $n \geq 1$?

Exercice 10:
Soit X une variable de loi uniforme sur $[0;1]$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$Y_n = \begin{cases} n & \text{si } 0 \leq X \leq 1/n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La suite (Y_n) converge t'elle en probabilité? presque sûrement? en moyenne d'ordre 1?

Exercice 11:
Déterminer sans calcul les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{[0,1]^n} f(\frac{x_1+...+x_n}{n})dx_1.\ldots.dx_n$ pour f fonction continue sur $[0,1]$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k}f(k/n)$ f fonction continue sur $[0,1]$ et p dans $[0,1]$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda.n}\frac{(\lambda.n)^k}{k!}f(k/n)$ pour f fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$ et $\lambda > 0$

Exercice 12:
Soit (T_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1. On pose :

$$X_n = min(T_1, \ldots, X_n) \quad Y_n = max(T_1, \ldots, X_n)$$

1. Montrer que (X_n) converge en probabilité vers 0.
2. La suite (X_n) converge t'elle presque sûrement? Si oui, le montrer.
3. Montrer que l'événement "la suite (Y_n) est bornée" est de probabilité nulle.
4. Calculer la fonction de répartition de $Y_n - log(n)$.
5. Montrer que la suite $(Y_n - log(n))$ converge en loi vers une variable dont on donnera la fonction de répartition.

Exercice 13:
On considère une suite de variables aléatoires indépendantes X_j de loi de Poisson de paramètre 1.

1. Quelle est la loi de $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$?
2. Soit $T_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$. En utilisant le théorème de la limite centrale et en considérant les événements $\{T_n \leq 0\}$, montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!} = 1/2$$

Exercice 14:
Afin de tester les performances d'un système de communications numériques, il est usuel de simuler le bon fonctionnement de ce système sur un ordinateur. Un des problème consiste

alors à estimer la probabilité d'erreur p associée à ce système. On estime généralement cette probabilité d'erreur par :

$$\hat{p}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$$

où X_i est la variable aléatoire définie par :

$$\begin{cases} X_i = 1 \text{ si il y a une erreur sur le symbole numéro i} \\ X_i = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Déterminer l'espérance et la variance de $\hat{p}_N$ et sa loi limite. On cherche la valeur de N pour que $\hat{p}_N$ soit une approximation de p avec une erreur relative inférieure à 10%. On se fixe un degré de confiance de 95%

Exercice 15:
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/n$.

1. Montrer que (X_n) converge en loi vers une variable X que l'on déterminera.
2. Montrer que (X_n) converge dans L^1 vers une limite qui sera précisée.
3. La suite (X_n) converge t'elle presque sûrement?